ВѢСТНИКЪ МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ НАУКЪ.

№ 17, 18 и 19.

I.

О произвольныхъ функціяхъ.

Найдемъ значеніе слѣдующаго двойнаго интеграла

$$\text{(I)} \qquad \int_{\varepsilon c}^{\varepsilon b}\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}} F(x, \psi y)\, \Phi'(uy)\, du\, dy,$$

въ которомъ x не зависитъ отъ y и u; а

$$(a) \qquad \int \Phi'(z)\, dz = \Phi(z) + C;$$

причемъ $\Phi(z)$ есть функція нечетная и сплошная какъ относительно предѣловъ интегрированія по u, такъ и относительно предѣловъ интегрированія по y.

Проинтегрировавъ данный интегралъ по u, будемъ имѣть:

$$\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}} \Phi'(uy)\, du = \left\{\frac{\Phi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) - \Phi(\varepsilon^2 y)}{y}\right\}.$$

Подставивъ найденное значеніе въ выраженіе (I), получимъ:

$$\int_{\varepsilon c}^{\varepsilon b} F(x, \psi y) \left\{\frac{\Phi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) - \Phi(\varepsilon^2 y)}{y}\right\} dy.$$

Измѣнивъ, въ послѣднемъ выраженіи, перемѣнную $\frac{y}{\varepsilon}$ въ z, найдемъ:

$$\int_c^b F(x, \psi\varepsilon z) \left\{\frac{\Phi(z) - \Phi(\varepsilon^3 z)}{z}\right\} dz.$$

Разсматривая послѣдній интегралъ и припоминая, что x не зависитъ отъ z, замѣчаемъ, что функція F могла-бы быть вынесена за знакъ интеграла, еслибъ функція ψ не зависѣла отъ z; а для этого необходимо принять, чтобы $\psi\varepsilon z$, при $\varepsilon = 0$, обращалась въ функцію $\psi(0)$; чего мы достигли бы когда c и b были бы величинами конечными; но, въ этомъ случаѣ, какъ видимъ изъ выраженія (I), интегралъ по y обращается въ близко-предѣльный.

Имѣя же въ виду рѣшить предложенную задачу не въ пользу близко-предѣльныхъ интеграловъ, остается принять, чтобы хоть одинъ изъ предѣловъ, c или b, былъ безконечно-большимъ, и постараться, при этомъ, отыскать тѣ условія, при которыхъ функція $F(x, \psi\varepsilon z)$ могла бы быть вынесена за знакъ интеграла.

Съ этою цѣлію разложимъ послѣдній интегралъ на сумму элементарныхъ значеній:

$$(b) \qquad \int_c^b F(x, \psi\varepsilon z)\left\{\frac{\Phi(z) - \Phi(\varepsilon^3 z)}{z}\right\} dz = \left[F(x, \psi\varepsilon z)\left\{\frac{\Phi(z) - \Phi(\varepsilon^3 z)}{z}\right\} dz\right]_{z=c} + \left[F(x, \psi\varepsilon z)\left\{\frac{\Phi(z) - \Phi(\varepsilon^3 z)}{z}\right\} dz\right]_{z=c+h} + \dots$$
$$\dots + \left[F(x, \psi\varepsilon z)\left\{\frac{\Phi(z) - \Phi(\varepsilon^3 z)}{z}\right\} dz\right]_{z=c+kh} + \dots + \left[F(x, \psi\varepsilon z)\left\{\frac{\Phi(z) - \Phi(\varepsilon^3 z)}{z}\right\} dz\right]_{z=b-h}.$$

Разсматривая вторую часть послѣдняго равенства, видимъ, что, для конечныхъ значеній z, $F(x, \psi\varepsilon z)$, при $\varepsilon = 0$, обращается въ $F(x, \psi 0)$; при значеніяхъ-же безконечно-большихъ $F(x,\psi\varepsilon z)$ обращается въ $F(x,\psi w)$; а изъ этого слѣдуетъ, что, для достиженія нашей цѣли, необходимо, чтобы члены разложенія, содержащіе въ себѣ функкію $F(x, \psi w)$, сдѣлались независимыми отъ нея, т. е. обращались бы въ нуль или неопредѣленность (*). Это-же возможно, когда функція $\Phi(z)$, для безкочечно-большихъ значеній z, будетъ обращаться въ 0 или въ $\frac{0}{0}$; и кромѣ того, когда $F(x, \psi\varepsilon z)$ для этихъ значеній будетъ величиною конечною.

Впрочемъ она, для безконечно-большихъ значеній z, можетъ обращаться въ безконечность, только приэтомъ, произведеніе этой безконечности на значеніе функціи $\Phi(z)$, при $z = \infty$, должно обращаться въ 0 или въ $\frac{0}{0}$.

Притомъ, если c и b будутъ безконечностями не выше втораго порядка, т. е. $c = -\frac{v}{\varepsilon^2}$ и $b = \frac{\lambda}{\varepsilon^2}$, то, какъ видимъ, функція $\Phi(\varepsilon^3 z)$ будетъ обращаться въ $\Phi(0) = 0$, ибо всякая функція $\Phi(z)$ нечетная и сплошная при $z = 0$ равна 0 (**).

Принявъ въ соображеніе разсмотрѣнныя нами условія и взявъ функцію $F(x, \psi 0)$ за общій множитель,—въ скобкахъ получимъ сумму элементарныхъ значеній интеграла:

$$\int_c^b \frac{\Phi(z)}{z}\, dz\ ;$$

въ слѣдствіе чего разсматриваемый нами интегралъ приведется къ

$$\int_{\varepsilon c}^{\varepsilon b}\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}} F(x, \psi y)\, \Phi'(uy)\, du\, dy = F(x, \psi 0)\int_c^b \frac{\Phi(z)}{z}\, dz,$$

или, полагая $\int_c^b \frac{\Phi(z)}{z}\, dz = \omega$, получимъ:

$$\int_{\varepsilon c}^{\varepsilon b}\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}} F(x, \psi y)\, \Phi'(uy)\, du dy = \omega\, F(x, \psi 0)\ .$$

И такъ предложенная нами задача приводитъ насъ къ слѣдующей теоремѣ:

$$\text{(II)}\quad F(x, \psi 0) = \frac{1}{\omega}\int_{\varepsilon c}^{\varepsilon b}\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}} F(x, \psi y)\, \Phi'(uy)\, du dy\ ,$$

кототая заключаетъ въ себѣ множество частныхъ видовъ, а между прочимъ и теорему Фурье.

Но прежде, чѣмъ приступимъ къ разсмотрѣнію нѣкоторыхъ изъ этихъ видовъ, замѣтимъ, что, въ частныхъ приложеніяхъ этой теоремы, намъ приходится измѣнять порядокъ интегрированія, причемъ необходимо замѣтить нѣкоторыя предосторожности.

Одна изъ такихъ предосторожностей относится къ тому случаю, когда одинъ изъ предѣловъ теоремы (II) c или b будетъ величиною конечною, отличною отъ ε.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть c будетъ величиною конечною, отличною отъ ε, а b — безконечно-большою.

Тогда, измѣнивъ порядокъ интегрированія въ теоремѣ (II), получимъ:

$$\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\int_{\varepsilon c}^{\varepsilon b} F(x, \psi y)\, \Phi'(uy)\, dy\, du\ .$$

Дабы въ послѣднемъ интегралѣ можно было совершить интегрированіе по y, необходимо, чтобы хоть функція $\Phi'(uy)$ была знакопостоянною относительно предѣловъ интегрированія по y. Но чтобы не стѣснить этой функціи, предположимъ что она знакопостоянная въ слѣдующихъ n промежуткахъ:

$$\varepsilon c \text{ и } \alpha,\quad \alpha \text{ и } \beta,\quad \beta \text{ и } \gamma,\ \ldots\ldots,\ w \text{ и } \varepsilon b;$$

тогда получимъ:

$$\int_{\varepsilon c}^{\varepsilon b} F(x, \psi y)\, \Phi'(uy)\, dy = \int_{\varepsilon c}^{\alpha} + \int_{\alpha}^{\beta} + \int_{\beta}^{\gamma} + \ldots\ldots + \int_{w}^{\varepsilon b}.$$

Въ послѣднемъ равенствѣ насъ интересуетъ только первый интегралъ, ибо всѣ остальные суть частные случаи теоремы (II) въ предположеніи въ ней c и b величинами безконечными. Поэтому, обозначивъ всѣ остальные интегралы, кромѣ перваго, черезъ s, получимъ:

$$\int_{\varepsilon c}^{\varepsilon b} F(x, \psi y)\, \Phi'(uy)\, dy = s + \int_{\varepsilon c}^{\alpha} F(x, \psi y)\, \Phi'(uy)\, dy = s + F\{x, \psi[\varepsilon c + \lambda(\alpha - \varepsilon c)]\}\int_{\varepsilon c}^{\alpha} \Phi'(uy)\, dy$$

$$= s + F\{x, \psi[\varepsilon c + \lambda(\alpha - \varepsilon c)]\}\left[\frac{\Phi(u\alpha) - \Phi(u\varepsilon c)}{u}\right].$$

(*) Подъ словомъ неопредѣленность мы понимаемъ неопредѣленность абсолютную; какъ напр. $\sin(\infty)$.
(**) Извѣстно: $\Phi(-z) = -\Phi(z)$, откуда: $\Phi(-z) + \Phi(z) = 0$, что при $z = 0$ доставитъ: $\Phi(0) + \Phi(0) = 0$; откуда: $\Phi(0) = 0$.

Чтобы достигнуть желаемой цѣли, сдѣлаемъ въ послѣднемъ равенствѣ $\varepsilon=0$, (тогда $\Phi(u\varepsilon c)$ обратится въ функцію $\Phi(0)=0$), и проинтегрируемъ его по u между предѣлами $\frac{1}{\varepsilon}$ и ε^2 (*); тогда найдемъ:

$$\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\int_{\varepsilon c}^{\varepsilon b} F(x,\psi y)\,\Phi'(uy)\,dy\,du=\int_0^\infty s\,du+F(x,\psi\lambda a)\int_0^\infty \frac{\Phi(ua)}{u}\,du\,,$$

или, назвавъ интегралы:

$$\int_0^\infty s\,du=k\,;\ \int_0^\infty \frac{\Phi(ua)}{u}\,du=\left[V(u-a)\right]_0^\infty=L\,;$$

получимъ:

$$(c)\qquad \int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\int_{\varepsilon c}^{\varepsilon b} F(x,\psi y)\,\Phi'(uy)\,dy\,du=k+L\,F(x,\psi\lambda a)\,.$$

Теперь проинтегрируемъ

$$s+F\{x,\psi[\varepsilon c+\lambda(a-\varepsilon c)]\}\left[\frac{\Phi(ua)-\Phi(u\varepsilon c)}{u}\right],$$

не дѣлая въ немъ $\varepsilon=0$ (**), получимъ:

$$\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\int_{\varepsilon c}^{\varepsilon b} F(x,\psi y)\,\Phi'(uy)\,dy\,du=\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}} s\,du+F\{x,\psi[\varepsilon c+\lambda(a-\varepsilon c)]\}\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{\Phi(ua)-\Phi(u\varepsilon c)}{u}\,du=$$

$$=\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}} s\,du+F\{x,\psi[\varepsilon c+\lambda(a-\varepsilon c)]\}\left[V(ua)\right]_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}-F\{x,\psi[\varepsilon c+\lambda(a-\varepsilon c)]\}\left[V(c)-V(\varepsilon^3 c)\right]\,.$$

Полагая въ послѣднемъ равенствѣ $\varepsilon=0$, найдемъ:

$$(d)\qquad \int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\int_{\varepsilon c}^{\varepsilon b} F(x,\psi y)\,\Phi'(uy)\,dy\,du=k+L\,F(x,\psi\lambda a)-L'\,F(x,\psi\lambda a)\,.$$

Сравнивая значеніе двойнаго интеграла, найденное въ (c), съ значеніемъ его найденнымъ въ (d), замѣчаемъ, что первое не есть истинное значеніе разсматриваемаго интеграла, ибо къ нему надобно еще прибавить величину $-L'\,F(x,\psi\lambda a)$, уничтоженную нами чрезъ интегрированіе въ предѣлѣ двойнаго интеграла.

Для примѣра пусть въ формулѣ (II) $c=n$, $b=\frac{1}{\varepsilon}$; $\frac{\Phi(z)}{z}=\frac{1}{1+z^2}$; $F(x,\psi y)=1+y$ (***); тогда:

$$F(x,\psi 0)=1\,,\ \omega=\int_n^\infty \frac{dz}{1+z^2}=\frac{\pi}{2}-\text{arc. tg. } n\,;$$

$$\frac{\pi}{2}-\text{arc. tg. } n=\int_{\varepsilon n}^{1}\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\left\{\frac{y}{1+(uy)^2}-\frac{2u^2y^3}{[1+(uy)^2]^2}+\frac{1}{1+(uy)^2}-\frac{2u^2y^2}{[1+(uy)^2]^2}\right\}du\,dy\,,$$

(*) Такой способъ нахожденія значенія двойного интеграла будемъ впредь, для краткости, называть: ***интегрированіемъ въ предѣлѣ.***

(**) Такой способъ нахожденія значенія двойного интеграла будемъ называть: ***интегрированіемъ внѣ предѣла.***

(***) Эти положенія возможны, ибо $\left[F(x,\psi\varepsilon z)\,\Phi z\right]_{z=\frac{w}{\varepsilon}}=\left[(1+\varepsilon z)\,\frac{z}{1+z^2}\right]_{z=\frac{w}{\varepsilon}}=0$, и $\left[\Phi(z)\right]_{z=0}=\left[\frac{z}{1+z^2}\right]_{z=0}=0.$

или:

$$\frac{\pi}{2} - \text{arc. tg. } n = \int_{\varepsilon n}^{1}\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}} \left\{ \frac{\partial\left[\frac{y+y^2}{1+(uy)^2}\right]}{\partial y} - \frac{y}{1+(uy)^2} \right\} du\, dy\,.$$

Употребляя здѣсь интегрированіе въ предѣлѣ, получимъ:

$$\frac{\pi}{2} - \text{arc. tg. } n = \int_{0}^{1}\int_{0}^{\infty} \left\{ \frac{\partial\left[\frac{y+y^2}{1+(uy)^2}\right]}{\partial y} - \frac{y}{1+(uy)^2} \right\} du\, dy\,,$$

откуда:

$$\int_{0}^{1} \left\{ \frac{\partial\left[\frac{y+y^2}{1+(uy)^2}\right]}{\partial y} - \frac{y}{1+(uy)^2} \right\} dy = \frac{2}{1+u^2} - \frac{\text{lg.}(1+u^2)}{2u^2}\,;$$

слѣдовательно:

$$\int_{0}^{1}\int_{0}^{\infty} \left\{ \frac{\partial\left[\frac{y+y^2}{1+(uy)^2}\right]}{\partial y} - \frac{y}{1+(uy)^2} \right\} du\, dy = \int_{0}^{\infty} \left\{ \frac{2}{1+u^2} - \frac{\text{lg.}(1+u^2)}{2u^2} \right\} du = \frac{\pi}{2}\,.$$

Употребляя же интегрированіе внѣ предѣла, будемъ имѣть:

$$\frac{\pi}{2} - \text{arc. tg. } n = \int_{\varepsilon n}^{1}\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}} \left\{ \frac{\partial\left[\frac{y+y^2}{1+(uy)^2}\right]}{\partial y} - \frac{y}{1+(uy)^2} \right\} du\, dy\,;$$

откуда, отбрасывая членъ съ ε^2:

$$\int_{\varepsilon n}^{1} \left\{ \frac{\partial\left[\frac{y+y^2}{1+(uy)^2}\right]}{\partial y} - \frac{y}{1+(uy)^2} \right\} dy = \frac{2}{1+u^2} - \frac{\text{lg.}(1+u)^2}{2u^2} + \frac{\text{lg.}[1+(u\varepsilon n)^2]}{2u^2} - \frac{\varepsilon n}{1+(u\varepsilon n)^2}\,,$$

слѣдовательно:

$$\int_{\varepsilon n}^{1}\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}} \left\{ \frac{\partial\left[\frac{y+y^2}{1+(uy)^2}\right]}{\partial y} - \frac{y}{1+(uy)^2} \right\} du\, dy = \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} \left\{ \frac{2}{1+u^2} - \frac{\text{lg.}(1+u^2)}{2u^2} \right\} du + \int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{\text{lg.}[1+(u\varepsilon n)^2]}{2u^2}\, du - \int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{\partial\,(u\varepsilon n)}{1+(u\varepsilon n)^2}\,.$$

Или, измѣнивъ во второмъ интегралѣ, предпослѣдняго равенства, перемѣнную: $u\varepsilon n$ на z, и полагая $\varepsilon = 0$; получимъ

$$\int_{\varepsilon n}^{1}\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}} \left\{ \frac{\partial\left[\frac{y+y^2}{1+(uy)^2}\right]}{\partial y} - \frac{y}{1+(uy)^2} \right\} du\, dy = \frac{\pi}{2} - \text{arc. tg. } n\,.$$

Изъ сей часъ разсмотрѣннаго нами случая, очевидно, является вопросъ: въ какихъ случаяхъ возможно интегрировать двойной интегралъ въ предѣлѣ и въ какихъ — внѣ предѣла?

Мы докажемъ, что если предѣлы c и b будутъ безконечностями перваго порядка, то въ такомъ случаѣ значеніе двойнаго интеграла не зависитъ отъ способа интегрированія, прилагаемаго для нахожденія онаго.

Пусть для сего въ теоремѣ (II) $\varepsilon b = m$, $\varepsilon c = \varepsilon^2$ (*); тогда придется намъ отыскать значеніе слѣдующаго двойнаго интеграла:

(*) Мы разсмотримъ случай когда предѣлы, относительно интегрированія по y, будутъ положительные, ибо, что скажемъ объ нихъ, тоже придется сказать и объ томъ случаѣ, когда они будутъ отрицательные.

$$\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\int_{\varepsilon^2}^{m} F(x,\psi y)\,\Phi'(uy)\,dy\,du\,.$$

Если функція Φ' между предѣлами ε^2 и m знакоперемѣнная, то розобьемъ эти предѣлы на промежутки, въ которыхъ-бы функція Φ' была знакопостоянною, которые пусть будутъ:

$$\varepsilon^2 \text{ и } \alpha,\ \alpha \text{ и } \beta,\ \beta \text{ и } \gamma,\ \gamma \text{ и } \delta,\ \ldots\ldots,\ w \text{ и } m\,;$$

получимъ:

$$\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\int_{\varepsilon^2}^{m} F(x,\psi y)\,\Phi'(uy)\,dy\,du = \int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\int_{\varepsilon^2}^{\alpha} + \int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\int_{\alpha}^{\beta} + \int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\int_{\beta}^{\gamma} + \int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\int_{\gamma}^{\delta} + \ldots\ldots + \int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\int_{w}^{m}\,.$$

Во второй части послѣдняго равенства насъ интересуетъ только первый интегралъ, ибо всѣ остальные, очевидно, не зависятъ отъ того положимъ-ли мы раньше или позже $\varepsilon=0$, а потому, называя значеніе ихъ черезъ s, будемъ имѣть:

$$\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\int_{\varepsilon^2}^{m} F(x,\psi y)\,\Phi'(uy)\,dy\,du = s + \int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\int_{\varepsilon^2}^{\alpha} F(x,\psi y)\,\Phi'(uy)\,dy\,du\,.$$

А интегралъ по y имѣетъ слѣдующее значеніе:

$$\int_{\varepsilon}^{\alpha} F(x,\psi y)\,\Phi'(uy)\,dy = F\{x,\psi[\varepsilon^2+\lambda(\alpha-\varepsilon^2)]\}\left[\frac{\Phi(u\alpha)-\Phi(u\varepsilon^2)}{u}\right].$$

Положивъ въ послѣднемъ равенствѣ $\varepsilon=0$, и проинтегрировавъ его по u, въ предѣлахъ отъ ε^2 до $\frac{1}{\varepsilon}$, найдемъ:

$$\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\int_{\varepsilon^2}^{m} F(x,\psi y)\,\Phi'(uy)\,dy\,du = s + F(x,\psi\lambda\alpha)\int_0^{\infty}\frac{\Phi(u\alpha)}{u}\,du\,.$$

Называя интегралъ

$$\int_0^{\infty}\frac{\Phi(u\alpha)}{u}\,du = [V(u\alpha)]_0^{\infty} = L\,,$$

получимъ:

$$\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\int_{\varepsilon^2}^{m} F(x,\psi y)\,\Phi'(uy)\,dy\,du = s + L\,F(x,\psi\lambda\alpha)\,.$$

Будемъ интегрировать

$$F\{x,\psi[\varepsilon^2+\lambda(\alpha-\varepsilon^2)]\}\left[\frac{\Phi(u\alpha)-\Phi(u\varepsilon^2)}{u}\right],$$

не дѣлая $\varepsilon=0$, получимъ:

$$\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\int_{\varepsilon^2}^{m} F(x,\psi y)\,\Phi'(uy)\,dy\,du = s + F\{x,\psi[\varepsilon^2+\lambda(\alpha-\varepsilon^2)]\}\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{\Phi(u\alpha)-\Phi(u\varepsilon^2)}{u}\,du =$$

$$= s + F\{x,\psi[\varepsilon^2+\lambda(\alpha-\varepsilon^2)]\}\left[\{V(u\alpha)\}_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}} - \{V(u\varepsilon^2)\}_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\right],$$

что при $\varepsilon = 0$ доставитъ:

$$\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}} \int_{\varepsilon^2}^{m} F(x, \psi y)\, \Phi'(uy)\, dy\, du = s + L \,.\, F(x, \psi\lambda a) \,,$$

что и доказываетъ справедливость сказаннаго.

Сдѣлаемъ нѣсколько примѣровъ на этотъ случай. Для сего возьмемъ формулу:

$$(e) \qquad F(x, \psi 0) = \frac{1}{\omega} \int_0^m \int_0^\infty F(x, \psi y)\, \Phi'(uy)\, du\, dy \,,$$

гдѣ:
$$\omega = \int_0^\infty \frac{\Phi(z)}{z}\, dz \,;$$

и положимъ въ ней: $F(x, \psi y) = \psi y$, $\Phi(z) = \sin z$ (*); тогда:

$$F(x,\psi 0) = \psi(0), \Phi'(z) = \cos z, \Phi'(uy) = \cos(uy), \omega = \int_0^\infty \frac{\sin z}{z}\, dz = \frac{\pi}{2},$$

$$(f) \qquad \psi(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^m \int_0^\infty \psi y \,.\, \cos(uy)\, du\, dy \,.$$

Полагая въ послѣдней формулѣ $\psi y = e^y$, получимъ:

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^m \int_0^\infty e^y \cos(uy)\, du\, dy \,;$$

но:

$$\int_0^m e^y \cos(uy)\, dy = \frac{e^m \cos um + e^m u \sin um - 1}{1 + u^2} \,;$$

поэтому:

$$(A) \qquad e^{-m}\pi = \int_0^\infty \frac{\cos um + u \sin um}{1 + u^2}\, du \,.$$

Но формула (f) имѣетъ мѣсто и при $\psi y = e^{-y}$, и тогда имѣемъ:

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^m \int_0^\infty e^{-y} \cos(uy)\, du\, dy \,,$$

откуда:

$$\int_0^m e^{-y} \cos(uy)\, dy = \frac{e^{-m} u \sin um - e^{-m} \cos um + 1}{1 + u^2} \,,$$

поэтому:

$$(B) \qquad 0 = \int_0^\infty \frac{u \sin um - \cos um}{1 + u^2}\, du \,.$$

Рѣшая выраженія (A) и (B) въ отношеніи интеграловъ, входящихъ въ нихъ, получимъ:

$$\int_0^\infty \frac{\cos um}{1 + u^2}\, du = \frac{\pi}{2} e^{-m}$$

$$\int_0^\infty \frac{u \sin um}{1 + u^2}\, du = \frac{\pi}{2} e^{-m}.$$

Такъ прилагается теорема (II) къ нахожденію Лапласовыхъ интеграловъ.

Пусть въ формулѣ (f) $\psi y = y$, тогда она обратится въ слѣдующее равенство:

$$0 = \int_0^m \int_0^\infty y \cos(uy)\, du\, dy \,,$$

или, интегрируя въ отношеніи y,

$$0 = \int_0^\infty \frac{mu \sin mu + \cos mu - 1}{u^2}\, du \,,$$

откуда:

$$\int_0^\infty \frac{\cos mu - 1}{u^2}\, du = -m \frac{\pi}{2} \,.$$

Положивъ въ формулѣ (f) $\psi y = \cos y$, получимъ:

$$\frac{\pi}{2} \int_0^m \int_0^\infty \cos y \cos(uy)\, du\, dy \,,$$

или, интегрируя въ отношеніи y,

$$(g) \qquad \frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{\sin m \cos mu - u \cos m \sin mu}{1 - u^2}\, du \,;$$

но формула (f) имѣетъ мѣсто и при $\psi y = \sin y$, слѣд.

$$0 = \int_0^m \int_0^\infty \sin y \cos(uy)\, du\, dy \,,$$

или:

$$(h) \qquad 0 = \int_0^\infty \frac{\cos m \cos mu + u \sin m \sin mu - 1}{1 - u^2}\, du.$$

(*) Такое положеніе возможно, ибо $\sin z$, при $z = 0$, обращается въ 0.

Умножая равенство (g) на $\sin m$, а равенство (h) на $\cos m$, и складывая ихъ, найдемъ:

$$\frac{\pi}{2}\sin m = \int_0^\infty \frac{\cos mu - \cos m}{1-u^2}\,du\ .$$

Умнажая же равенство (g) на $\cos m$, а равенство (h) на $\sin m$, и вычитая второе равенство изъ перваго, получимъ:

$$\frac{\pi}{2}\cos m = \int_0^\infty \frac{\sin m - u\sin mu}{1-u^2}\,du\ .$$

Положимъ въ формулѣ (e):

$$F(x,\psi y)=\psi y,\quad \Phi(z)\ ze^{z^2},\quad (*);$$

тогда:

$$F(x,\psi 0)=\psi(0);\qquad \Phi'(z)=e^{-z^2}-2z^2e^{-z^2};$$

$$\Phi'(uy)=e^{-(uy)^2}-2(uy)^2e^{-(uy)^2};\quad \omega=\int_0^\infty e^{-z^2}dz=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\ .$$

$$(i)\qquad \psi(0)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^m\int_0^\infty \psi y\{e^{-u^2y^2}-2u^2y^2e^{-u^2y^2}\}\,du\,dy.$$

Полагая въ послѣдней формулѣ $\psi y=y$, получимъ:

$$0=\int_0^m\int_0^\infty \{ye^{-u^2y^2}-2u^2y^3e^{-u^2y^2}\}\,du\,dy\ ,$$

или, интегрируя въ отношеніи y, получимъ:

$$0=\int_0^\infty \frac{e^{-m^2u^2}-1+2m^2u^2e^{-m^2u^2}}{2u^2}\,du\ .$$

Но:

$$m^2\int_0^\infty e^{-m^2u^2}du=m\frac{\sqrt{\pi}}{2}\ ,$$

слѣдовательно:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-m^2u^2}-1}{u^2}\,du=-m\sqrt{\pi}\ .$$

Что же касается того случая, когда c и b будутъ безконечностями втораго порядка, то, здѣсь, иногда значеніе двойнаго интеграла зависитъ отъ способа интегрированія, а въ другой разъ не зависитъ.

Чтобы убѣдиться въ справедливости сказаннаго, положимъ въ теоремѣ (II): $c=\varepsilon$, $b=\frac{1}{\varepsilon^2}$; $F(x,\psi y)=\psi y$;

тогда:

$$F(x,\psi 0)=\psi(0)\ ,\ \omega=\int_0^\infty \frac{\Phi(z)}{z}\,dz\ ,$$

$$(k)\qquad \psi(0)=\frac{1}{\omega}\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}}\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}}\psi y\,\Phi'(uy)\,du\,dy\ .$$

Пусть въ послѣднемъ равенствѣ $\Phi(z)=z\,e^{-z^2}$; тогда

$$\Phi'(uy)=e^{-u^2y^2}-2u^2y^2\ e^{-u^2y^2},\ \omega=\int_0^\infty e^{-z^2}dz=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\ ,$$

$$\psi(0)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\psi y\{e^{-u^2y^2}-2u^2y^2e^{-u^2y^2}\}\,du\,dy\ .$$

Полагая въ послѣдней формулѣ: $\psi y=y$ (*):

$$(l)\qquad 0=\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\{y\,e^{-u^2y^2}-2u^2y^3e^{-u^2y^2}\}\,du\,dy\ ;$$

откуда, производя интегрированіе въ предѣлѣ, получимъ:

$$0=\int_0^\infty\left[\frac{1}{2u^2}-\frac{1}{u^2}\right]du\ .$$

Для того, чтобы произвести интегрированіе внѣ предѣла, напишемъ равенство (l) въ такомъ видѣ:

$$0=\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\left\{\frac{\partial[y^2e^{-u^2y^2}]}{\partial y}-y\ e^{-u^2y^2}\right\}du\,dy.$$

Производя интегрированіе въ отношеніи y получимъ:

$$0=\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2.u^2.e^{-\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)^2}+e^{-\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)^2}-e^{-(u\varepsilon)^2.\varepsilon^2}}{2u^2}\,du,$$

а измѣнивъ перемѣнную $\frac{u}{\varepsilon}$ на z находимъ:

$$0=\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon^2}}\frac{2z^2\ e^{-z^2}+e^{-z^2}-e^{-(\varepsilon^2z)^2\varepsilon^2}}{2\varepsilon z^2}\,dz\ ;$$

откуда:

Это положеніе возможно, ибо: $[\Phi z]_{z=0}=[z\,e^{-z^2}]_{z=0}=0$.

(*) Такое положеніе возможно, ибо:

$$[F(x,\psi\varepsilon z)\Phi z]_{z=\frac{w}{\varepsilon^2}}=[\varepsilon z\,e^{-z^2}z]_{z=\frac{w}{\varepsilon^2}}=0$$

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon^2}} \frac{e^{-z^2} - e^{-(\varepsilon^2 z)^2 \varepsilon^2}}{2z^2}\, \partial z = -\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon^2}} e^{-z^2}\, \partial z \,,$$

или:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-z^2} - 1}{z^2}\, \partial z = -\sqrt{\pi}\,,$$

чего и нужно было ожидать.

Пусть въ формулѣ (k): $\Phi(z) = \sin z$; тогда:

$$\Phi'(uy) = \cos(uy)\,, \quad \omega = \int_0^{\infty} \frac{\sin z}{z}\, \partial z = \frac{\pi}{2}\,,$$

$$\psi(0) = \frac{2}{\pi} \int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}} \int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}} \psi y \cos(uy)\, \partial u\, \partial y\,.$$

Сдѣлавъ въ послѣднемъ равенствѣ $\psi y = y$ (*), тогда:

$$0 = \int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}} \int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}} y \cos(uy)\, \partial u\, \partial y\,.$$

Интегрируя въ отношеніи y, получимъ

$$0 = \int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}} \left[\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\sin\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)}{u} + \frac{\cos\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) - 1}{u^2} \right] \partial u\,.$$

Измѣнивъ въ послѣднемъ равенствѣ перемѣнную $\frac{u}{\varepsilon}$ на z, будемъ имѣть :

$$0 = \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon^2}} \left[\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\sin z}{z} + \frac{1}{\varepsilon}\, \frac{\cos(z) - 1}{z^2} \right] \partial z\,,$$

откуда :

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(z) - 1}{z^2}\, \partial z = -\int_0^{\infty} \frac{\sin z}{z}\, \partial z\,,$$

или :

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(z) - 1}{z^2}\, \partial z = -\frac{\pi}{2}\,,$$

что и должно быть.

Положимъ въ формулѣ (k): $\Phi(z) = \sin z$, $\psi\, y = e^{-y}$; тогда :

$$\omega = \int_0^{\infty} \frac{\sin z}{z}\, \partial z\,,$$

$$\omega = \int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}} \int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-y} \cos(uy)\, \partial u\, \partial y\,.$$

Употребляя при нахожденіи послѣдняго интеграла интегрированіе въ предѣлѣ, будемъ имѣть :

$$\omega = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-y} \cos(uy)\, \partial u\, \partial y\,,$$

или, интегрируя въ отношеніи y, получимъ :

$$\omega = \int_0^{\infty} \frac{\partial u}{1 + u^2} = \frac{\pi}{2}\,;$$

поэтому :

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin z}{z}\, \partial z = \frac{\pi}{2}\,.$$

Такъ можно поступать, когда желаемъ найти ω.

Замѣтимъ, что исключенный случай близкопредѣльныхъ интеграловъ, при доказательствѣ теоремы (II), только стѣснилъ общность ея; а между тѣмъ онъ вполнѣ имѣетъ въ ней мѣсто, — съ условіемъ: чтобы въ этомъ случаѣ, при нахожденіи значенія двойнаго интеграла, всегда употреблять итнегрированіе внѣ предѣла.

Для примѣра положимъ въ теоремѣ (II) :

$F(x, \psi y) = \psi y$, $c = \varepsilon$, $b = n$; тогда: $F(x, \psi 0) = \psi(0)$, $\omega = \int_0^{n} \frac{\Phi(z)}{z}\, \partial z$,

$$\psi(0) = \frac{1}{\omega} \int_{\varepsilon^2}^{\varepsilon n} \int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}} \psi\, y\, \Phi'(uy)\, \partial u\, \partial y.$$

Полагая въ послѣдней формулѣ: $\Phi(z) = \frac{z}{1 + z^2}$; тогда :

$$\Phi'(z) = \frac{1}{1 + z^2} - \frac{2z^2}{(1 + z^2)^2}\,, \quad \Phi'(uy) = \frac{1}{1 + (uy)^2} - \frac{2u^2 y^2}{[1 + (uy)^2]^2}\,, \quad \omega = \int_0^{n} \frac{\partial z}{1 + z^2} = \text{arc.tg}\, n,$$

(*) Это положеніе возможно, ибо:

$$[F(x, \psi \varepsilon z).\ \Phi z]_{z = \frac{\mu}{\varepsilon^2}} = [\varepsilon z \sin z]_{z = \frac{\mu}{\varepsilon^2}} = \frac{0}{0}\,.$$

$$\psi(0) = \frac{1}{\text{arc. tg.}\, n}\int_{\varepsilon^2}^{\varepsilon n}\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}} \psi y \,.\left\{ \frac{1}{1+(uy)^2} - \frac{2u^2y^2}{[1+(uy)^2]^2} \right\} du\,dy.$$

Сдѣлавъ въ послѣднемъ равенствѣ: $\psi y = y$, получимъ:

$$0 = \int_{\varepsilon^2}^{\varepsilon n}\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}} \left\{ \frac{y}{1+(uy)^2} - \frac{2u^2y^3}{[1+(uy)^2]^2}\right\} du\,dy,$$

или

$$0 = \int_{\varepsilon^2}^{\varepsilon n}\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}} \left\{ \frac{\partial\left[\frac{y^2}{1+(uy)^2}\right]}{\partial y} - \frac{y}{1+(uy)^2}\right\} du\,dy,$$

откуда, пренебрегая вторымъ членомъ, получимъ.

$$\int_{\varepsilon^2}^{\varepsilon n} \frac{\partial\left[\frac{y^2}{1+(uy)^2}\right]}{\partial y}\, dy = \frac{(\varepsilon n)^2}{1+(u\varepsilon n)^2},$$

$$\int_{\varepsilon^2}^{\varepsilon n} \frac{y\,dy}{1+(uy)^2} = \frac{1}{2u^2}\,\lg.\,[1+(u\varepsilon n)^2];$$

слѣдовательно:

$$0 = \int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\left\{\frac{(\varepsilon n)^2}{1+(u\varepsilon n)^2} - \frac{\lg.\,[1+(u\varepsilon n)^2]}{2u^2}\right\} du = N,$$

откуда:

$$\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{\varepsilon n\,\partial(u\varepsilon n)}{1+(u\varepsilon n)^2} = \varepsilon n\left[\text{arc.tg.}(u\varepsilon n)\right]_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}},$$

$$\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{\lg.\,[1+(u\varepsilon n)^2]}{u^2}\,du = \varepsilon n\left\{2\,\text{arc.tg.}\,(u\varepsilon n) - \frac{\lg.[1+(u\varepsilon n)^2]}{u\varepsilon n}\right\}_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}};$$

поэтому:

$$N = \varepsilon n\left\{\text{arc.tg.}(u\varepsilon n)\right\}_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}} - \varepsilon n\left\{\text{arc. tg.}\,(u\varepsilon n)\right\}_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}} + \frac{\varepsilon n}{2}\left\{\frac{\lg.\,[1+(u\varepsilon n)^2]}{u\varepsilon n}\right\}_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon n}{2}\left\{\frac{\lg.\,[1+(u\varepsilon n)^2]}{u\varepsilon n}\right\}_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}} = 0, \text{ при } \varepsilon = 0.$$

Еще необходимо замѣтить, въ пользу общности теоремы (II), что, въ (a), функція $\Phi(z)$, въ частныхъ случаяхъ, можетъ и не быть нечетною, лишь-бы только она выполняла всѣ условія, требуемыя теоремою (II), т. е. при $z = 0$ получала-бы значеніе равное нулю, и притомъ для безконечныхъ значеній z обращалась-бы въ 0 или $\frac{0}{0}$, и была бы сплошною какъ относительно предѣловъ интегрированія по u, такъ и относительно предѣловъ интегрированія по y.

Чтобы взять примѣръ на этотъ случай, положимъ для сего въ теоремѣ (II) $F(x, \psi y) = \psi y$, тогда она приметъ видъ:

$$(m)\quad \psi(0) = \frac{1}{\omega}\int_{\varepsilon c}^{\varepsilon b}\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}} \psi y\, \Phi'(uy)\, du\, dy, \text{ гдѣ } \omega = \int_c^b \frac{\Phi(z)}{z}\, dz.$$

Далѣе, сдѣлаемъ: $c = \varepsilon$, $b = \frac{1}{\varepsilon^2}$; $\Phi(z) = z\, e^{-z}$ (*); тогда:

$$\Phi'(z) = e^{-z} - z\, e^{-z},\ \Phi'(uy) = e^{-uy} - uy\, e^{-uy},\ \omega = \int_0^{\infty} e^{-z}\, dz = 1,$$

$$\psi(0) = \int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}} \psi y \left\{ e^{-uy} - uy\, e^{-uy}\right\} du\, dy.$$

Полагая въ послѣднемъ равенствѣ: $\psi y = \sin y$ (*), получимъ:

$$0 = \int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}}\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}} \sin y \left[e^{-uy} - uy\, e^{-uy}\right] du\, dy.$$

Употребляя при нахожденіи этого интеграла интегрированіе въ предѣлѣ, будемъ имѣть:

$$0 = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \sin y \left[e^{-uy} - uy\, e^{-uy}\right] du\, dy,$$

или, интегрируя въ отношеніи y, получимъ:

$$0 = \int_0^{\infty}\left\{\frac{1}{1+u^2} - \frac{2u}{(1+u^2)^2}\right\} du;$$

откуда:

$$\int_0^{\infty}\frac{u^2 du}{(1+u^2)^2} = \frac{\pi}{4},$$

что и должно быть.

До сихъ поръ намъ не встрѣчалось ни одного

(*) Такое положеніе возможно, ибо эта функція при $z = 0$ обращается въ 0, и притомъ сплошная какъ относительно предѣловъ интегрированія по u, такъ и относительно предѣловъ интегрированія по y.

(*) Что возможно, ибо $[\sin \varepsilon z.\ z\, e^{-z}]_{z = \frac{w}{\varepsilon}} = 0$.

двойнаго интеграла, который-бы можно было проинтегрировать въ предѣлѣ, сначала по u.

Въ общемъ же случаѣ, при доказательствѣ теоремы (II), мы видѣли невозможность такого способа интегрированія. А поэтому заключаемъ: если только возможно проинтегрировать двойной интегралъ, въ предѣлѣ, сначала по u, то неиначе если будетъ ограниченъ произволъ функціи F, т. е. когда она, изъ безчисленнаго множества свойствъ, въ слѣдствіе ея произвола ей принадлежащихъ, будетъ выражать одно,—притомъ вполнѣ опредѣленное свойство, ибо этому послѣднему должны будутъ отвѣчать и вполнѣ опредѣленные предѣлы. Чтобы убѣдиться въ истинѣ сказаннаго, найдемъ нѣкоторые частные виды теоремы (II); для чего представимъ её въ слѣдующемъ, болѣе простомъ видѣ:

$$\text{(III.)}\qquad F(x,0)=\frac{1}{\omega}\int_{\varepsilon c}^{\varepsilon b}\int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\omega}} F(x,y)\,\Phi'(uy)\,\partial u\,\partial y\,,$$

$$\text{гдѣ}\qquad \omega=\int_0^{\infty}\frac{\Phi(z)}{z}\,\partial z.$$

Полагая въ послѣднемъ равенствѣ: $\varepsilon c=-x$, $\varepsilon b=m-x$, $F(x,y)=F(x+y)$; тогда: $F(x,0)=F(x)$,

$$c=-\frac{x}{\varepsilon},\; b=\frac{m-x}{\varepsilon},\quad \omega=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Phi(z)}{z}\,\partial z\ (*),$$

$$F(x)=\frac{1}{\omega}\int_{-x}^{m-x}\int_0^{\infty} F(x+y)\,\Phi'(uy)\,\partial u\,\partial y.$$

Измѣнивъ, въ послѣднемъ равенствѣ, перемѣнную $x+y$ на z, получимъ:

$$\text{(IV.)}\qquad F(x)=\frac{1}{\omega}\int_0^{m}\int_0^{\infty} F(z)\,\Phi' u\,[z-x]\,\partial u\,\partial z.$$

Очевидно, сдѣлавъ къ теоремѣ (III), предѣлы εc и εb равными: $-\infty$ и $+\infty$, а функцію $\Phi(z)=\sin(z)$, получимъ ту теорему, которую въ первый разъ предложилъ Фурье.

Полагая въ формулѣ (III):

$$\varepsilon c=-\left[\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^{\frac{1}{n}}+1\right],\ \varepsilon b=\left(\frac{m}{x}\right)^{\frac{1}{n}}-1, F(x,y)=F[x(1+y)^n];$$

тогда:

$$F(x,0)=F(x),\, c=-\infty,\, b=+\infty\ (*),\ \omega=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Phi(z)}{z}\,\partial z,$$

$$F(x)=\frac{1}{\omega}\int_{-\left\{\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^{\frac{1}{n}}+1\right\}}^{\left(\frac{m}{x}\right)^{\frac{1}{n}}-1}\int_0^{\infty} F[x(1+y^n]\,\Phi'(uy)\,\partial u\,\partial y.$$

Измѣнивъ, въ послѣдней формулѣ, перемѣнную $x\,(1+y)^n$ на z; получимъ:

$$x^{\frac{1}{n}}F(x)=\frac{1}{n\omega}\int_0^{m}\int_0^{\infty} F(z)\ \Phi' u\left[\left(\frac{z}{x}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right].\,z^{\frac{1}{n}-1}\partial u\partial z.$$

Полагая, въ послѣднемъ равенствѣ, $\frac{1}{n}=p$, будемъ имѣть:

$$\text{(V.)}\ x^p F(x)=\frac{p}{\omega}\int_0^{m}\int_0^{\infty} F(z).\,z^{p-1}.\,\Phi' u\left[\left(\frac{z}{x}\right)^{p}-1\right]\partial u\,\partial z.$$

Сдѣлавъ въ теоремѣ (III):

$$\varepsilon c=-\left[\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right],\ \varepsilon b=-\left(\frac{x}{m}\right)^{\frac{1}{n}}+1,\ F(x,y)=F\left[\frac{x}{(1-y)^n}\right];$$

тогда:

$$F(x,0)=F(x),\, c=-\infty,\, b=+\infty\,(**),\ \omega=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Phi(z)}{z}\,\partial z\,,$$

$$F(x)=\frac{1}{\omega}\int_{-\left\{\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right\}}^{-\left(\frac{x}{m}\right)^{\frac{1}{n}}+1}\int_0^{\infty} F\left[\frac{x}{(1-y)^n}\right]\ \Phi'(uy)\,\partial u\,\partial y.$$

Измѣнивъ, въ послѣднемъ равенствѣ, перемѣнную $\frac{x}{(1-y)^n}$ на z:

$$\frac{F(x)}{x^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{n\omega}\int_0^{m}\int_0^{\infty} F(z).\ z^{-\frac{1}{n}-1}.\ \Phi' u\left[1-\left(\frac{x}{z}\right)^{\frac{1}{n}}\right]\partial u\,\partial z.$$

Полагая, въ послѣдней формулѣ, $\frac{1}{n}=p$, получимъ:

(*) При условіи, чтобы разность $m-x$ была величиною положительною.

(*) При условіи чтобы разность $\left(\frac{m}{x}\right)^{\frac{1}{n}}-1$ была величиною положительною.

(**) При условіи чтобы разность $1-\left(\frac{x}{m}\right)^{\frac{1}{n}}$ была величиною положительною.

$$\text{(VI.)}\quad \frac{F(x)}{x^p} = \frac{p}{\omega}\int_0^m\int_0^\infty F(z).\, z^{-p-1}.\Phi' u \left[1-\left(\frac{x}{z}\right)^p\right] \partial u\, \partial z.$$

Съ помощію этихъ формулъ уже легко достигнуть желаемой цѣли.

Для примѣра возьмемъ уравненіе распространенія теплоты въ шарѣ.

Пусть шаръ, извѣстнымъ образомъ нагрѣтый, находится въ воздухѣ (положимъ, напр. онъ находился въ кипящей водѣ до тѣхъ поръ, пока поверхность его приняла температуру воды, потомъ вынутъ изъ воды и поставленъ въ воздухѣ); и пусть начальное состояніе температуры каждой точки его дано. По прошествіи нѣкотораго времени, онъ начнетъ охлаждаться, и температура его точекъ будетъ зависѣть отъ времени, и отъ разстояній этихъ точекъ отъ центра. Эта зависимость выражается слѣдующимъ дифференціальнымъ уравненіемъ:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\,\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

гдѣ v температура, t время, x разстояніе точки отъ центра шара, k величина постоянная двухъ измѣреній. Очевидно, x и t перемѣнныя независимыя, а v ихъ функція, которую надобно опредѣлить.

Умноживъ обѣ части послѣдняго уравненія на x, получимъ:

$$x\,\frac{\partial v}{\partial t} = k\left(x\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial v}{\partial x}\right), \text{ или:}$$

$$(m)\qquad \frac{\partial y}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \text{ гдѣ: } y = vx.$$

Кромѣ того дано начальное состояніе температуры шара, т. е. $v = f(x)$ при $t=0$, для всѣхъ x-въ между 0 и X, гдѣ X радіусъ шара. Положимъ: $x f(x) = F(x)$; тогда при $t=0$ имѣемъ: $y = F(x)$, гдѣ F есть данная функція для всѣхъ значеній x, заключающихся между предѣлами 0 и X.

Очевидно y есть функція x и t; обозначивъ её чрезъ $\varphi(x, t)$, по формулѣ (IV), въ предположеніи въ ней $\Phi(z) = \sin(z)$, имѣемъ:

$$y = \varphi(x, t) = \frac{1}{\pi}\int_0^m\int_0^\infty \varphi(z, t)\cos u\,[z-x]\,\partial u\,\partial z.$$

Полагая въ послѣднемъ равенствѣ: $\varphi(z, t) = T$,

$$y = \frac{1}{\pi}\int_0^m\int_0^\infty T\cos u\,[z-x]\,\partial u\,\partial z;$$

отсюда выводимъ:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{\pi}\int_0^m\int_0^\infty \frac{\partial T}{\partial t}\cos u\,[z-x]\,\partial u\,\partial z,$$

$$k\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{1}{\pi}\int_0^m\int_0^\infty ku^2\,T\cos u\,[z-x]\,\partial u\,\partial z.$$

Подставивъ выраженія для $\frac{\partial y}{\partial t}$ и $k\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ въ уравненіе (m) получимъ;

$$0 = \frac{1}{\pi}\int_0^m\int_0^\infty \left[\frac{\partial T}{\partial t} + ku^2\,T\right]\cos u\,[z-x]\,\partial u\,\partial z,$$

откуда: $$\frac{\partial T}{\partial t} + ku^2\,T = 0,$$

или: $$\frac{\partial T}{T} = -ku^2\,\partial t.$$

Интегрируя это уравненіе отъ $t=0$ до $t=t$, находимъ:

$$\lg.\frac{T}{T_0} = -ku^2\,t,$$

или: $$T = T_0\,e^{-ku^2 t},$$

гдѣ T_0 не зависитъ отъ t и равно $\varphi(z, t)$ при $t=0$

И такъ:

$$y = \frac{1}{\pi}\int_0^m\int_0^\infty T_0\,e^{-ku^2 t}\cos u\,[z-x]\,\partial u\,\partial z;$$

а положивъ здѣсь $t=0$, будемъ имѣть:

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^m\int_0^\infty T_0\cos u\,[z-x]\,\partial u\,\partial z.$$

И такъ какъ формула (IV) даетъ также:

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^m\int_0^\infty F(z)\cos u\,[z-x]\,\partial u\,\partial z,$$

поэтоту $$T_0 = F(z);$$

слѣдов.

$$y - \frac{1}{\pi}\int_0^m\int_0^\infty F(z)\,e^{-ku^2 t}\cos u\,[z-x]\,\partial u\,\partial z.$$

Совершая интегрированіе по u, получимъ:

$$y = \frac{e^{-\frac{x^2}{4kt}}}{2\sqrt{\pi kt}}\int_0^m F(z)\,e^{-\frac{z(z-2x)}{4kt}}\,\partial z;$$

слѣдовательно искомая температура v, которая равна $\frac{v}{x}$, будетъ:

$$v = \frac{e^{-\frac{x^2}{4kt}}}{2x\sqrt{\pi kt}} \int_0^m F(z)\, e^{-\frac{z(z-2x)}{4kt}}\, dz.$$

Пусть еще дано слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$(n) \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - q\,\frac{v}{x^2}\right),$$

гдѣ k есть величина постоянная двухъ измѣреній, q тоже постоянная величина, x и t перемѣнныя независимыя, а v ихъ функція, которую надобно опредѣлить. Кромѣ того дано $v = F(x)$ при $t = 0$.

Представивъ уравненіе (n) въ видѣ:

$$x\,\frac{\partial v}{\partial t} = k\left(x^2\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - qv\right);$$

можемъ для нахожденія функціи v употребить формулу (V), въ предположеніи въ ней $p = 2$, $\Phi(z) = \sin(z)$:

$$x^2 v = x^2 \varphi(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^m\!\!\int_0^\infty z\,\varphi(z,t)\cos u\,[z^2x^{-2}-1]\,du\,dz,$$

или

$$x^2 v = \frac{1}{\pi}\int_0^m\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} z\,T\cos u\,[z^2x^{-2}-1]\,du\,dz,$$

гдѣ $T = \varphi(z,t)$.

Но, такъ какъ интегралъ:

$$\frac{i}{\pi}\int_0^m\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} z\,T\sin u\,[z^2x^{-2}-1]\,du\,dz = 0 \ (*),$$

то придавъ его къ обоимъ частямъ послѣдняго равенства, получимъ:

$$(o) \qquad x^2 v = \frac{1}{\pi}\int_0^m\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} z\,T\; e^{iu[z^2x^{-2}-1]}\,du\,dz;$$

откуда:

$$kpv = \frac{1}{\pi}\int_0^m\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} kp\,x^{-2}.\,z.\,T\; e^{iu[z^2x^{-2}-1]}\,du\,dz,$$

$$x^2\,\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\pi}\int_0^m\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} z\,\frac{\partial T}{\partial t}\; e^{iu[z^2x^{-2}-1]}\,du\,dz;$$

$$-kx^2\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^m\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} z\,T\,k\,[4x^{-6}z^4u^2 - 14\,i\,x^{-4}z^2u - 6x^{-2}]\; e^{iu[z^2x^{-2}-1]}\,du\,dz.$$

Складывая послѣднія три равенства; получимъ:

$$0 = \frac{1}{\pi}\int_0^m\!\!\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{z\,\frac{\partial T}{\partial t} + T\,z\,k\,[px^{-2} + 4x^{-6}z^4u^2 - 14\,i\,x^{-4}z^2u - 6x^{-2}]\right\} e^{iu[z^2x^{-2}-1]}\,du\,dz,$$

отсюда:

$$z\,\frac{\partial T}{\partial t} + T\,z\,k\,[px^{-2} + 4x^{-6}z^4u^2 - 14ix^{-4}z^2u - 6x^{-2}] = 0,$$

или:

$$\frac{\partial T}{T} = -\,k\,[px^{-2} + 4x^{-6}z^4u^2 - 14ix^{-4}z^2u - 6x^{-2}]\,\partial t.$$

Интегрируя послѣднее равенство между предѣлами отъ $t = 0$ до t, найдемъ:

$$\lg.\,\frac{T}{T_0} = -\,k\,[px^{-2} + 4x^{-6}z^4u^2 - 14ix^{-4}z^2u - 6x^{-2}]\,t;$$

откуда:

$$T = T_0\; e^{-kt\,[4x^{-6}z^4u^2 - 14ix^{-4}z^2u + (p-6)\,x^{-2}]}.$$

Подставляя въ равенствѣ (o) вмѣсто T его значеніе будемъ имѣть:

$$x^2 v = \frac{1}{\pi}\int_0^m\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} z\,T_0\, e^{-kt\,[4x^{-6}z^4u^2 - 14ix^{-4}z^2u + (p-6)x^{-2}]}\; e^{iu[z^2x^{-2}-1]}\,du\,dz;$$

а полагая здѣсь $t = 0$, получимъ:

$$x^2 F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^m\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} z\,T_0\; e^{iu[z^2x^{-2}-1]}\,du\,dz.$$

Но формула (V) даетъ:

$$x^2 F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^m\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} z\,F(z)\; e^{iu[z^2x^{-2}-1]}\,du\,dz;$$

поэтому:

$$T_0 = F(z).$$

(*) $i = \sqrt{-1}$.

Слѣдовательно:

$$x^2\, v\, \frac{e^{-(p-6)\,x^{-2}\,kt}}{\pi} \int_0^m \int_{-\infty}^{+\infty} z\, F(z)\, e^{-4ktx^{-6}z^4u^2 + iu\,[14\,ktx^{-4}z^2 + x^{-2}z^2 - 1]}\, du\, dz.$$

Совершая интегрированіе по u, получимъ:

$$v = \frac{x\, e^{-\left\{\frac{\left(\frac{kt}{x}\right)^2 [16p+100] + 28\,kt + x^2}{16kt}\right\}}}{2\sqrt{\pi kt}} \int_0^m \frac{F(z)}{z} \cdot e^{\frac{2(14\,kt\,x^2 + x)\,z^2 - x^6}{16ktz^4}}\, dz.$$

С. Петербургъ
13-го Іюня 1861 года.

Студентъ. *Н. Коціевскій.*

О приведеніи кратныхъ интеграловъ съ помощію формулы Фурье.

Въ № 5 »Вѣстника Математическихъ Наукъ« мы разсмотрѣли нѣсколько кратныхъ интеграловъ, приводимыхъ, съ помощію формулы Фурье, къ болѣе простому виду. Теперь, употребляя ту же формулу, найдемъ значеніе кратнаго интеграла:

$$S = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \cdots e^{+[x_1(a_1+y_1) + x_2(a_2+y_2) + \ldots + x_n(a_n+y_n)]\sqrt{-1}} \cdot f(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_n.$$

Въ самомъ дѣлѣ по формулѣ Фурье имѣемъ:

$$f(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, du \int_0^{\infty} e^{[vu - v(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2)]\sqrt{-1}} \cdot dv,$$

а слѣдовательно:

$$S = \frac{1}{\pi} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \cdots e^{\mp(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n)\sqrt{-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, du \int_0^{\infty} e^{vu\sqrt{-1}} \cdot dv \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(vy_1^2 \mp x_1y_1)\sqrt{-1}} \cdot dy_1 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(vy_n^2 + x_ny_n)\sqrt{-1}} \cdot dy_n$$

Но:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(vy^2 \pm yx)\sqrt{-1}} \cdot dy = \sqrt{\pi} . e^{-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}} \cdot \frac{e^{\frac{x^2}{4v}\sqrt{-1}}}{\sqrt{v}}$$

и потому:

$$S = \pi^{\frac{n}{2}-1} . e^{-\frac{n\pi}{4}\sqrt{-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, du \int_0^{\infty} e^{vu\sqrt{-1}} \frac{dv}{v^{\frac{n}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+\left(\frac{x_1^2}{4v} \mp a_1x_1\right)\sqrt{-1}} dx_1 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+\left(\frac{x_n^2}{4v} \mp a_nx_n\right)\sqrt{-1}} \cdot dx_n,$$

или, замѣчая что:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{+\left(\frac{x^2}{4v} \mp ax\right)\sqrt{-1}}\, dx = 2\, e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}} \cdot \sqrt{\pi} . e^{-va^2} \cdot \sqrt{v},$$

получимъ:
$$S = 2^n \pi^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,du \int_0^{\infty} e^{(vu - v\varrho^2)\sqrt{-1}}\,dv\,,$$

гдѣ:
$$\varrho^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots\ldots + a_n^2.$$

Но, по формулѣ Фурье:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,du \int_0^{\infty} e^{(vu - v\varrho^2)\sqrt{-1}}\,dv = \pi\, f(\varrho^2)\,,$$

слѣдовательно:
$$S = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \ldots e^{\mp[x_1(a_1+y_1) + x_2(a_2+y_2) + \ldots + x_n(a_n+y_n)]\sqrt{-1}} \cdot f(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2)\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_n\,dy_1\,dy_2 \ldots dy_n = (2\pi)^n f(\varrho^2); \ldots (1)$$

а для $n = 1$ имѣемъ.
$$f(a^2) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{\mp x(a+y)\sqrt{-1}} \cdot f(y^2)\,dx\,dy \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

15-го Апрѣля

1861 г.

Л. Износковъ.

II.

Обзоръ новѣйшихъ успѣховъ въ познаніи физическаго устройства солнца.

(Статья 3-я, См. N. 8 и 11).

---

3. Разъясненіе явленій, открывающихся при полныхъ солнечныхъ затмѣніяхъ, въ соединеніи столь многихъ благопріятныхъ обстоятельствъ, какія представлялись при случаѣ послѣдняго затмѣнія 8 (16) Іюля 1860 г., и въ связи съ огромнымъ участіемъ, принятымъ въ наблюденіи онаго астрономами и физиками всего образ. міра представляло возможно большія ручательства за успѣхъ. Но нельзя сказать, чтобы результаты вполнѣ соотвѣтствовали ожиданіямъ, ибо усилія столь значительнаго числа опытныхъ наблюдателей едва не оказались несостоятельными прибавить что либо существенное къ рѣшенію единственнаго главнаго вопроса, на который было обращено общее вниманіе, а именно: принадлежатъ ли красные выступы и вѣнецъ дѣйствительно солнцу, или суть только явленія оптическія, обязанныя своимъ происхожденіемъ преимущественно дифракціи? — Почти равно - многочисленные приверженцы того и другого мнѣнія вынесли изъ послѣднихъ наблюденій новыя подтвержденія своихъ гипотезъ и разногласіе существуетъ во всей своей прежней силѣ. Если съ одной стороны мы читаемъ: »Dans ces moments-là, ma conviction sur la nature de ce que je voyais fut que le phénomène était *réel* et que je voyais vraiment des flammes dans l'atmosphère solaire et des nuages suspendus dans ces flammes; il m'aurait été impossible d'imaginer autre chose, comme, par exemple, que cela pût être un phénomène quelconque de diffraction ou de réfraction.« (*Secchi*, Compts R. T. LI N. 5), или »Es drängte sich mir beim Anblicke des successiven Verschwindens dieser scharf begränzten, hellen Massen, (velche als Planetenscheiben aussahen) die Ueberzeugung auf, dass ich reelle Objecte sähe, deren Bedeckung durch den Mond von mir wahrgenommen würde.« (Winnecke, Mem. de l'Acad. St. Petersb. T. IV. N. 1) и другія еще болѣе опредѣленно высказанныя убѣжденія; а съ другой стороны: »es ist vielmehr erwiesen, dass die rothen Hervorragungen *keine* dem Sonnenkörper angehörige Theile sind, welche bei der Bewegung des Mondes von der Sonnenscheibe auf der einen Seite allmälig hervortreten und auf der entgegensetzten entsprechend verschwinden« и т. д (Feilitzsch., Astr. Nach. 1278); или »Il est résulté pour moi de l'observation de l'éclipse du 18 Juillet l'impression, *d'autans plus vive que je m'y attendais moins*, que tous ces phénomènes tels que la couronne, les faisceaux de rayons et les protuberances ne sont pas des phénomenes existants réellement, qui etc. etc...« (Plantamour, Bibl. univ. de Genève);—то мы можемъ изъ этаго только убѣдиться,какъ мало можно довѣрять въ подобныхъ обстоятельствахъ субъективному впечатлѣнію наблюдателей и съ какою осторожностію надобно принимать тѣ показанія, которыя опираются только на простой *видимости* явленія. Такой, неутѣшительный результатъ можно оправдать только краткостію времени, въ какое совершается явленіе, и преувеличенностію ожи-

даній, какія по справедливости можно было имѣть, судя по природѣ самого явленія, отъ нашихъ теперешнихъ средствъ наблюденія. Тѣмъ не менѣе это затмѣніе вызвало цѣлую, еще далеко неистощившуюся литературу, вполнѣ познакомиться съ которою стоило бы весьма много труда; и я ограничусь здѣсь упоминаніемъ только весьма немногихъ отчетовъ о наблюденіяхъ, въ которыхъ содержатся данныя, внушающія сравнительно бо́льшее довѣріе. Прежде всего однако я приведу вкратцѣ доводы, представляемые защитниками оптической теоріи, главными поборниками которой надобно считать Профессора Феличь, Плянтамура, Ламона, Фэ, Д'Аббади, Рюмкера и другихъ.

Еще въ началѣ 1860 г., на основаніи прежнихъ наблюденій, Проф. Феличь напечаталъ въ »Zeitschrifft für populäre Mittheilungen aus dem Gebiete der Astronomie und verwandter Wissenschaften (Bd. I. Heft. IV, Bd. II. Heft. I), подробный разборъ физическихъ явленій, представляющихся при полныхъ солнечныхъ затмѣніяхъ, въ которомъ приходитъ къ тому окончательному результату, что оптическая теорія нетолько можетъ объяснить явленія, такъ какъ они представляются, но даже указываетъ на необходимость этихъ явленій; между тѣмъ какъ физическая теорія невполнѣ согласуется съ наблюденіями и для каждаго новаго явленія требуетъ новыхъ гипотезъ о природѣ солнечныхъ покрововъ. Главныя основанія доводовъ Г-на Феличь состоятъ въ слѣдующемъ: Единственное наблюденіе, говорящее въ пользу физической (или, по его выраженію, топографической) гипотезы состоитъ въ постепенномъ возрастаніи красныхъ выступовъ на западной сторонѣ луннаго диска и таковомъ же уменьшеніи оныхъ на восточной сторонѣ; но измѣренія (собственно оцѣнка), произведенныя при случаѣ затмѣній 1842 и 1851 г г., вездѣ показали, что степень возрастанія и уменьшенія вообще значительнѣе нежели бы слѣдовало ожидать по мѣрѣ передвиженія луны, соотвѣтственнаго времени наблюденія. Выступы наблюдаемые на сѣверномъ и южномъ краѣ необходимо должны бы были при движеніи луны измѣнять въ отношеніи къ ея центру уголъ положенія, что до сихъ поръ не было замѣчено (?). Показанія различныхъ наблюдателей относительно угловъ положенія тѣхъ же самыхъ выступовъ, наблюдаемыхъ съ различныхъ, довольно удаленныхъ пунктовъ, представляютъ весьма значительныя разногласія. Соотвѣтственность въ положеніи выступовъ и солнечныхъ пятенъ и факеловъ могла быть указана только для весьма немногихъ изъ нихъ и тѣмъ менѣе говоритъ въ пользу связи обѣихъ явленій, что первые бывали наблюдаемы и вблизи солнечныхъ полюсовъ, тогда какъ ни пятна, ни факелы не достигаютъ къ нимъ. Красноватый или розовый цвѣтъ выступовъ необъяснимъ по этой теоріи, равно какъ и косвенные и изогнутые лучи, наблюдаемые въ вѣнцѣ при каждомъ затмѣніи. Напротивъ того, явленіе диффракціи, *необходимо* имѣющее мѣсто при покрытіи солнца луною, точно также какъ и въ многократно повторенныхъ опытахъ искуственнаго затмѣнія, объясняетъ какъ общій видъ вѣнца, (призывая впрочемъ на помощь вліяніе отклоненнаго свѣта, отражаемаго частицами земной атмосферы, заключенными въ конусѣ тѣни), такъ равно и степень его свѣта, ширину, измѣняющуюся въ продолженіи покрытія, окрашиваніе вблизи луннаго края желтоватымъ, или красноватымъ цвѣтомъ и наконецъ явленія поляризаціи, наблюдаемыя Г-мъ Ліэ во время затмѣнія 1858 г. Точно также, по мнѣнію Г. Феличь, интерференція отклоненныхъ на неровномъ лунномъ краѣ солнечныхъ лучей вполнѣ объясняетъ явленіе, извѣстное подъ именемъ выступовъ.

Мы остановимся здѣсь на этихъ доводахъ, какъ самыхъ сильнѣйшихъ въ пользу образованія вѣнца и оптической теоріи вообще и укажемъ, въ послѣдующемъ разборѣ наблюденій, на нѣкоторые очевидные недостатки оныхъ. Прежде всего замѣтимъ здѣсь, что теорія эта оставляетъ неопредѣленною ширину вѣнца, какая можетъ быть приписана *непосредственному* дѣйствію диффракціи. Представимъ себѣ около какого нибудь пункта окружность, описанную произвольнымъ радіусомъ r и другую, концентрическую съ нею, радіусомъ $r-a$, гдѣ a означаетъ длину свѣтовой полуволны; кромѣ того опишемъ двѣ такія же окружности радіусами $nr-a$ и nr, гдѣ n произвольно большое число. Если свѣтовая волна, приходящая изъ весьма большаго разстоянія, будетъ остановлена на пути такъ, что избранный нами центральный пунктъ придется на границѣ геометрической тѣни, то степень освѣщенія, получаемаго этимъ пунктомъ отъ непокрытой полуволны, по теоріи интерференціи, обусловливается рядомъ: $a - b + c - d \ldots\ldots$, въ которомъ a, b, c означаютъ напряженіе свѣта элементовъ этой полуволны, коихъ отстоянія отъ освѣщаемаго пункта на ихъ внѣшней границѣ соотвѣтственно будутъ: r, $r+a$, $r+2a$ и т. д. Извѣстно, что рядъ: $a - b + c - d \ldots$ есть весьма быстро сходящійся. Въ геометрическомъ разсмотрѣніи, напряженіе свѣта, возбуждаемое каждымъ элементомъ этого ряда мы можемъ принимать пропорціональнымъ угловой величинѣ, подъ какою представляется каждый изъ нихъ съ освѣщаемаго пункта. Обозначивъ чрезъ A_1 уголъ подъ коимъ видимъ первый элементъ на разстояніи r отъ центральнаго пункта, мы будемъ имѣть: $\cos A_1 = \frac{r-a}{r}$, а для угловой величины того же элемента на разстояніи nr будетъ $\cos A_n = \frac{nr-a}{nr}$, откуда $\frac{\cos A_1}{\cos A_n} = \frac{r-a}{r-\frac{a}{n}}$.

Такимъ образомъ очевидно, что отношеніе косинусовъ угловыхъ величинъ перваго элемента на разстояніяхъ r и nr съ возрастаніемъ числа n весьма быстро приближается къ предѣльной величинѣ $\frac{r-a}{r}$, при которой уголъ A_n обращается въ нуль. То же самое разсужденіе приложимо и къ цѣлой суммѣ элементовъ; дающихъ рядъ $a - b + c - d \ldots\ldots$ Такимъ образомъ нельзя согласиться съ утвержденіемъ Г. Феличь, что явленіе вѣнца, какъ слѣдствіе диффракціи, представляется тѣмъ выгоднѣе для оптической теоріи, чѣмъ далѣе находится отъ насъ предметъ производящій затмѣніе. Напротивъ того, мы должны сказать, что если при опытахъ искуственно произведеннаго затмѣнія, на разстояніяхъ r, непревышающихъ нѣсколькихъ метровъ, угловая ширина свѣтлаго вѣнца, обязаннаго своимъ происхожденіемъ *непосредственно* диффракціи (т. е. въ без-

воздушномъ пространствѣ) должна быть весьма незначительною; то на разстояніи луны отъ земли она должна почти совершенно исчезать для непосредственнаго наблюденія, въ особенности въ нѣкоторомъ удаленіи отъ границы геометрической тѣни (*). Остается, поэтому, только участіе въ образованіи вѣнца солнечныхъ затмѣній свѣта, отклоненнаго при краяхъ луны и затѣмъ отраженнаго отъ частицъ земной атмосферы, лежащихъ внутри конуса тѣни. Участіе это никоимъ образомъ не можетъ отвергать и физическая теорія, но однако само по себѣ оно представляется недостаточнымъ для полнаго объясненія явленій. Представимъ себѣ конусъ геометрической тѣни, проникающій въ земную атмосферу и наблюдателя, находящагося внутри этаго конуса близь границы онаго; проведемъ отъ мѣста наблюдателя двѣ прямыя линіи: одну къ тому пункту края луны, къ которому касается ближайшій къ наблюдателю солнечный лучь, а другую къ тому мѣсту земной атмосферы, гдѣ входитъ въ нее этотъ лучь; то становится очевиднымъ, что внутри угла образуемаго этими двумя линіями (который измѣняется отъ 0°, при началѣ и концѣ затмѣнія, до нѣсколькихъ градусовъ) частицы земной атмосферы могутъ быть сравнительно только слабо освѣщены свѣтомъ отклоненнымъ при краѣ луны, тогда какъ частицы, лежащія за предѣлами этого угла, должны получать и непосредственный свѣтъ отъ края солнца и вмѣстѣ съ тѣмъ подлежатъ почти такимъ же условіямъ освѣщенія вслѣдствіе диффракціи отъ покрытой для нихъ части солнца. По этому замѣчанію, вліяніе освѣщенія земной атмосферы должно бы всего очевиднѣе обнаруживаться вскорѣ послѣ наступленія полнаго затмѣнія и предъ окончаніемъ онаго замѣтнымъ *усиленіемъ* свѣта вѣнца въ нѣкоторомъ *разстояніи* отъ края луны и весьма значительнымъ распространеніемъ вѣнца со стороны ближайшей границы конуса полной тѣни. Первое не было наблюдаемо, и на ширину вѣнца очевидно не имѣетъ вліянія освѣщеніе частицъ атмосферы, лежащихъ *внѣ* конуса тѣни. Заключеніе, которое, намъ кажется, мы вправѣ сдѣлать на основаніи предъидущаго разсужденія таково: свѣтлѣйшая, болѣе однородная часть вѣнца солнечныхъ затмѣній, прилегающая непосредственно къ лунному краю, не можетъ быть обязана своимъ происхожденіемъ ни диффракціи, ни исключительно освѣщенію земной атмосферы; а потому должна быть приписана особой причинѣ, которую мы принуждены искать въ солнечной атмосферѣ.

Другое дѣло съ объясненіемъ видимости внѣшней части вѣнца, въ образованіи которой нельзя не признать участія свѣта отраженнаго частицами земной атмосферы, но лежащими *внутри* конуса тѣни. По согласному утвержденію большей части наблюдателей она не отличается постоянствомъ свѣта, представляетъ лучеобразный видъ, часто съ неровными очертаніями и даже изогнутыми и пересѣкающимися лучами. Что внѣшняя часть вѣнца обязана, *по преимуществу*, своимъ происхожденіемъ особой причинѣ, слѣдуетъ, по видимому, уже изъ того обстоятельства, что она часто была наблюдаема ясно отдѣляющеюся отъ внутренняго кольца, непосредственно прилегающаго къ лунному краю; и даже по наблюденіямъ *Піоля* въ Лоди (1842 г.) между этими двумя концентрическими вѣнцами было видимо имъ промежуточное пространство, какъ болѣе темное кольцо. Португальскій Лейтенантъ Оомъ, принадлежавшій къ экспедиціи Пулковскихъ астрономовъ и имѣвшій исключительною цѣлію наблюденія изслѣдованіе вѣнца затмѣнія 1860 г., описываетъ видъ онаго въ сущности слѣдующимъ образомъ: (Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St Pétersb. 1861 T. IV. N. I.) Прежде начала полнаго затмѣнія можно было усмотрѣть уже вполнѣ образовавшееся кольцо слабаго, молочнаго свѣта около 3′ въ ширину. Нѣсколько секундъ спустя, внѣшнее концентрическое къ лунному краю очертаніе онаго получило неровности и въ тоже время показались нѣкоторые лучи. Между тѣмъ вѣнецъ раздѣлился на два кольца и лучи казались выходящими изъ внутренняго, который былъ равномѣрнаго блеска и свѣтлѣе наружнаго. Внѣшняя граница перваго кольца имѣла рѣзкое очертаніе, хотя сила свѣта замѣтно ослабѣвала здѣсь, начиная отъ края луны. Ширина этого кольца была найдена во всѣхъ направленіяхъ и въ два различные момента одинаковою, а именно въ 2′. На внѣшней его границѣ получали начало лучи направленные перпендикулярно къ оной и довольно правильно распредѣленные. Въ нѣкоторомъ разстояніи отъ луннаго края эти лучи оставались какъ бы соединенными между собою, такъ сказать, сплошными и образовали такимъ образомъ второе кольцо обнимающее первое и концентрическое съ нимъ, шириною въ 3′; далѣе отъ луннаго края лучи являлись уже отдѣльными, неравномѣрно длинными, такъ что крайняя граница распространенія оныхъ могла заключаться между 7′ и 9′. Наиболѣе выдавались изъ нихъ пять лучей, неравномѣрно распредѣленныхъ на окружности луны; углы положенія оныхъ въ отношеніи къ лунному центру, измѣренные наблюдателемъ въ два различные момента, оказались *неизмѣнными*. Въ заключеніе Г. Оомъ замѣчаетъ, что вѣнецъ представлялся совершенно спокойнымъ и онъ не могъ замѣтить какого либо измѣненія въ системѣ лучей, какъ упоминаютъ о томъ другіе наблюдатели, и что даже по окончаніи полнаго затмѣнія вѣнецъ оставался концентрическимъ съ луною. Въ отчетахъ другихъ наблюдателей затмѣнія 1860 года нѣтъ недостатка въ самыхъ крайнихъ противорѣчіяхъ; и изъ нихъ можно извлечь только одно заключеніе, что внѣшняя часть вѣнца, что касается числа, распредѣленія, вида лучей и общаго очертанія феномена представлялась весьма разнообразно нетолько по мѣсту наблюдателей и различію ихъ оптическихъ средствъ, но даже и по индивидуальной особенности наблюдателей, поставленныхъ въ условіяхъ повидимому совершенно одинаковыхъ; между тѣмъ какъ внутренняя часть вѣнца была находима безъ исключенія всѣми спокойною, равномѣрно освѣщенною, и безъцвѣтною. Нельзя сомнѣваться также и въ томъ, что самая внѣшняя граница вѣнца, въ особенности для наблюдателей невооруженнымъ глазомъ, наиболѣе отклонялась отъ луннаго диска именно со стороны ближайшаго

(*) Въ справедливости этого довода я пробовалъ также убѣдиться опытомъ, производя затмѣніе искуственнаго источника свѣта, сообщая лучамъ онаго параллельное направленіе и поставляя покрывающій предметъ на различныхъ разстояніяхъ отъ наблюдателя.

отстоянія границы полной тѣни. Нельзя также пропустить безъ вниманія и замѣчанія Секки (Comptes Rendus T. LI. N. 8.), что на двухъ изъ фотографическихъ изображеній, снятыхъ во время полнаго затмѣнія, хотя и непредставляющихъ вѣнецъ съ надлежащею ясностію, можно замѣтить растяженіе онаго въ направленіи, которое не совпадаетъ ни съ эклиптикой ни съ направленіемъ движенія луны, а напротивъ того весьма близко съ положеніемъ солнечнаго экватора. Къ сожалѣнію только одинъ наблюдатель, за исключеніемъ Г-на Оома, сколько мнѣ извѣстно, представилъ точные углы положенія для наблюдаемыхъ имъ болѣе выдающихся лучей, изъ коихъ одинъ, искривленный и напоминающій форму лиры, былъ замѣченъ въ большей части пунктовъ наблюденія и могъ представить весьма надежный предметъ для сравненія: только Г. Рюмкеръ, который даетъ уголъ положенія одной вѣтви этой лиры въ 190°; тогда какъ двукратное наблюденіе Г. Оома, вѣроятно для той же вѣтви, дало 212°. Не смотря на недостатокъ точныхъ данныхъ, которые бы показали зависимость положенія лучей внѣшней части вѣнца отъ опредѣленныхъ мѣстъ на лунномъ краѣ, намъ кажется весьма вѣроятнымъ объясненіе происхожденія этихъ лучей, представленное Феличемъ, какъ слѣдствіе интерференціи солнечныхъ лучей, отклоненныхъ конусообразными вершинами горъ, лежащихъ на лунномъ краѣ. Вѣроятность этаго объясненія значительно подкрѣпляется опытами искуственно-произведенныхъ затмѣній и всего болѣе опытами Г-на Секки (Comptes Rendus T. LI. N. 8), въ которыхъ ему удалось, при помощи неровностей или на окружности потемняющаго тѣла, или на границѣ источника свѣта, получить лучи нетолько прямые и нормальные, но также пересѣкающіеся и касательные къ окружности потемняющаго диска.

Если мы спросимъ наконецъ доставили ли до сихъ поръ наблюденія вѣнца солнечныхъ затмѣній какое либо неоспоримое доказательство въ пользу существованія солнечной атмосферы; то отвѣтъ не можетъ быть вполнѣ утвердительнымъ: ничто не противорѣчитъ принятію оной и напротивъ многія обстоятельства дѣлаютъ существованіе оной вѣроятнымъ. Въ числѣ послѣднихъ довольно важное мѣсто занимаетъ обнаруженіе поляризаціи вѣнца и направленія оной, составляющее попреимуществу заслугу Г. Ліэ при случаѣ затмѣнія 1858 года въ Paranagua (Comptes Rendus T. LI N. 21) и Г-на Пражмовскаго при случаѣ послѣдняго затмѣнія, наблюдаемаго имъ въ Briviesca. Оба астронома доказали несомнѣнно, что плоскость поляризаціи вѣнца вообще совпадаетъ съ направленіемъ нормальнымъ къ лунному диску. Г-нъ Пражмовскій (Comptes R. T. LI. N. 6.), при помощи устроеннаго имъ,весьма чувствительнаго аппарата, убѣдился, что вѣнецъ представляетъ не слабые слѣды поляризаціи, а напротивъ цвѣта весьма интенсивные, и что на этомъ основаніи можно заключить, что газообразныя частицы посылаютъ къ намъ солнечный свѣтъ, отраженный подъ угломъ, близкимъ къ maximum поляризаціи. А такъ какъ для газовъ этотъ уголъ составляетъ 45°, то отраженіе должно происходить отъ частицъ, находящихся вблизи солнца, т. е. принадлежащихъ къ солнечной атмосферѣ. Весьма интересно еще замѣчаніе Г-на Пражмовскаго, хотя онъ и не ручается за его полную несомнѣнность, (ибо основывался въ этомъ случаѣ только на воспоминаніи впечатлѣнія), что часть вѣнца наиболѣе поляризованная, т. е. представляющая наиболѣе интенсивные дополнительные цвѣта въ полярископѣ, не соотвѣтствовала свѣтлѣйшему мѣсту вѣнца, непосредственно прилегающему къ лунному диску, а находилась въ нѣкоторомъ розстояніи отъ краевъ послѣдняго. Жаль, что Г. Пражмовскій не изслѣдовалъ въ тоже время въ какомъ удаленіи отъ луннаго края можно было еще замѣтить послѣдніе слѣды поляризаціи. Подтвержденіе чувствительной поляризаціи въ вѣнцѣ во время затмѣнія 1860 г. мы находимъ также въ наблюденіяхъ: Секки, Г-на Буръ, участника Алжирской экспедиціи подъ управленіемъ Лосседа (Laussedat) (Comptes rendus T. LI. N. 26) и Г на Д'Аббади (Astr. Nachr. N. 1290).—Наблюденія поляризаціи при случаѣ полныхъ солнечныхъ затмѣній имѣютъ неоспоримую важность; но нелишне также замѣтить, что само явленіе поляризаціи еще недостаточно изучено во всѣхъ его частностяхъ. Гови недавно доказалъ поляризацію разсѣяннаго свѣта (См. N. 6. Вѣстника Мат. Наукъ), и произведенный имъ опытъ не исключаетъ возможности сильной поляризаціи лучей вѣнца солнечныхъ затмѣній, при прохожденіи оныхъ черезъ земную атмосферу.

Обратимся теперь къ явленію красныхъ выступовъ, служащихъ главнымъ предметомъ разногласія для приверженцевъ физической и оптической теорій. Несогласіе въ наблюденіяхъ относящихся къ положенію оныхъ на лунномъ краѣ, числу, наружному виду и измѣненію отстоянія отъ края луны въ краткое время полнаго помраченія солнца, — несогласія, которыя даже часто встрѣчаются и между наблюдателями на весьма близкихъ одинъ отъ другаго пунктахъ, даютъ приверженцамъ оптической теоріи, повидимому, сильный аргументъ противъ дѣйствительнаго, матеріальнаго существованія этихъ предметовъ. Къ этому присоединяется еще, что оцѣнка въ измѣненіи высоты выступовъ на восточномъ и западномъ краѣ луны отклоняется постоянно *въ одну и туже сторону* отъ результата, какого слѣдовало бы ожидать, судя по дѣйствительному перемѣщенію луны, и потому она не можетъ быть объяснена только лишь случайными ошибками наблюденій. Но какъ бы то ни было, оптическая теорія, встрѣчающаяся съ важными затрудненіями уже при объясненіи наружнаго вида выступовъ, оказывается *совершенно* несостоятельною въ виду одного факта, который по наблюденіямъ послѣдняго затмѣнія не можетъ быть долѣе оспариваемъ.—Два наблюдателя: Эри вблизи мѣстечка Эренна и Брунсъ въ Тарацона, рѣшились обратить преимущественно ихъ вниманіе на тѣ выступы, которые бы появились въ положеніи перпендикулярномъ къ направленію движенія центра луны, весьма основательно расчитывая, что измѣненія въ углахъ положенія оныхъ, отнесенныхъ къ центрамъ солнца и луны, какія должны произойти во время полнаго затмѣнія, скорѣе и несомнѣннѣе поведутъ къ рѣшенію вопроса, чѣмъ неточное измѣреніе высоты выступовъ, лежащихъ въ направленіи видимаго перемѣщенія луны. Въ особенности удачны были въ этомъ отношеніи наблюденія Проф. Брунса, который уже за двѣ ми-

нуты до наступленія полнаго солнечнаго затмѣнія усмотрѣлъ однвъ изъ наибольшихъ и свѣтлѣйшихъ выступовъ вблизи сѣвернаго рога солнечнаго серпа. Этотъ выступъ, остававшійся видимымъ почти въ совершенно неизмѣнной формѣ во все продолженіе полнаго затмѣнія, могъ быть преслѣдуемъ наблюдателемъ еще 6,3 минуты послѣ окончанія затмѣнія. Такъ какъ опредѣленіе угловъ положенія этого выступа, соотвѣтственно крайнимъ моментамъ наблюденія, представляетъ наибольшую важность, то я считаю умѣстнымъ привѣсти здѣсь собственныя выраженія наблюдателя, заимствуя оныя изъ подробнаго отчета Г. Бруна, напечатаннаго въ »Berichte der Königl. Sächs Gesellschaft der Wissenschaften, Sitzung am 12 Dec. 1860.«—Уголъ положенія при центрѣ луны, кокой должна была имѣть оконечность сѣвернато рога серпа, за двѣ минуты до наступленія полнаго затмѣнія, долженъ былъ составлять по вычисленію 48°,8. Разстояніе ближайшей части выступа отъ этого рога было таксируемо въ 1′ дуги и ширина основанія выступа въ $1\frac{3}{4}$ минуты; такимъ образомъ разность угловъ положенія при центрѣ луны для средины выступа и оконечности серпа по вычисленію, съ извѣстнымъ для даннаго момента угловымъ поперечникомъ луны, составляла 6°,5 и слѣдовательно уголъ положенія этого выступа въ $2^{ч}48^{м},4$ истиннаго времени равнялся 42°,3. При наблюденіи исчезновенія выступа, въ слѣдствіе ослабленія свѣта, онъ находился, по замѣчанію Бруна въ такомъ разстояніи отъ рога, что послѣдній долженъ былъ употребить еще 2 минуты времени, дабы достигнуть къ этому мѣсту; положеніе рога въ этотъ моментъ соотвѣтствовало по вычисленію углу 12°,9, а присчитывая къ оному разстояніе до средины выступа, получается уголъ положенія онаго для $3^{ч}2^{м}.1$ истин. времени равный 16°,0. Такимъ образомъ измѣненіе въ углѣ положенія этого выступа въ продолженіи 13,7 минутъ составляло 26°,3. Между тѣмъ, разсчитывая подобнымъ же образомъ углы положенія того же выступа въ отношеніи къ центру солнца для обоихъ моментовъ, получается соотвѣтственно: 36°,6 и 35°,5— величины согласныя на столько, на сколько позволяетъ ожидать того неполная точность въ опредѣленіи размѣровъ выступа и отстоянія его отъ рога. Неизмѣнность формы и величины этого выступа въ продолженіе затмѣнія достаточно объясняется его положеніемъ, которое составляло уголъ въ 81° съ направленіемъ движенія луны.

Не столь удачны были въ этомъ отношеніи наблюденія Эри, который усмотрѣлъ красные выступы только за 15 секундъ до начала полнаго затмѣнія и вскорѣ по наступленіи онаго сдѣлалъ первое опредѣленіе угловъ положенія для двухъ изъ нихъ (Mémoires de l'Académie des Sciences, St. Petersb. T. IV. N. I). Послѣднее наблюденіе было сдѣлано уже по окончаніи затмѣнія. »Оставивъ трубу, говоритъ Г. Эри, я вынесъ впечатлѣніе, что углы положенія въ отношеніи къ центру луннаго диска несомнѣнно и ясно уменьшились. Это уменьшеніе вообще слѣдуетъ и изъ результатовъ измѣренія, однако не съ такою степенью очевидности, которая бы не позволяла сомнѣнія«. Вотъ эти результаты:

	для 1-го выступа	для отдѣльнаго облачка
въ 1-й половинѣ затмѣнія	25° 30′	55° 50′
	20 20	56 20
во 2-й половинѣ затмѣнія	20 20	56 20
	23 20	53 30

Первый выступъ есть тотъ самый, который былъ наблюдаемъ и Брунсомъ, и въ то же время былъ видимъ почти всѣми другими наблюдателями, за исключеніемъ Фелича и Рюмкера. Что касается послѣдняго, то въ своемъ отчетѣ о наблюденіяхъ: Die totale Sonnenfinsterniss am 18 Juli 1860, beobachtet zu Castellon de la Plana (Hamburg 1861) онъ, очевидно, ошибочно принимаетъ другой выступъ, отмѣченный имъ подъ угломъ положенія въ 344° за тождественный съ наблюдаемымъ Брунсомъ. Поэтому мнѣ кажется весьма вѣроятнымъ, что выступъ, о которомъ здѣсь идетъ рѣчь дѣйствительно былъ видимъ Г. Рюмкеромъ, но положеніе его или было не отмѣчено, или впослѣдствіи смѣшано съ положеніемъ болѣе возвышенной оконечности сѣверо-западной красной полосы, равнымъ образомъ наблюдаемой въ большемъ или меньшемъ растяженіи почти всѣми астрономами. Самое несомнѣнное доказательство относительно существованія и измѣненія угла положенія этого выступа представляютъ фотографическія изображенія, снятыя Г. Секки въ Desierto de las palmas, вблизи восточнаго берега Пиренейскаго полуострова. Сравненіе двухъ фотографій: одной, снятой въ началѣ, а другой при концѣ полнаго затмѣнія, даетъ разность въ углѣ положенія въ 6°, а именно 28°—22° (*). Этотъ же самый выступъ находится и въ фотографическихъ изображеніяхъ Г. Де-ля-Рю, полученныхъ вблизи другой оконечности линіи полнаго затмѣнія въ Riva Bellosa. На одной изъ фотографій Г. Де-ля-Рю, (неизвѣстно, впрочемъ, къ какому моменту относящейся), уголъ положенія этого выступа составляетъ равнымъ образомъ 28°.—Полный отчетъ о наблюденіяхъ Англійскихъ астрономовъ, составляемый Г. Эри, еще не появился въ печати. Безъ сомнѣнія результаты фотографичесчихъ измѣреній Г. Де-ля-Рю займутъ въ ономъ весьма видное мѣсто, и пріобрѣтутъ еще большее значеніе при сравнаніи съ таковыми же результатами Г. Секки. Но и предварительное сравненіе, сдѣланное послѣднимъ (Comptes rendus T LI. N. 11.) показало уже, что въ обоихъ пунктахъ наблюденія были фотографируемы одни и тѣ же предметы, что несомнѣнно вытекаетъ изъ слѣдующихъ фотографическихъ угловъ положенія:

по Г. Де-ля-Рю:	28°	57°	72°	—	111°	129°	135°	154°	—
— Г. Секки:	28-22	57	72	102	112	—	135	157	182

— Г. Де-ля-Рю:	197	—	—	—	—	—	340
— Г. Секки:	192-194	230	260	270	280	330	348

(*) Значительная разность въ углахъ положенія того же выступа, (19°) (хотя и основанныхъ на простой оцѣнкѣ) какая оказалась между 2-мя наблюдателями почти на одномъ же пунктѣ (Pobes), а именно Гг. Виннеке и Отто Струве нисколько не можетъ служить аргументомъ *противъ* дѣйствительнаго существованія и тождественности наблюдаемаго предмета, какъ опасается послѣдній; она служитъ только *подтвержденіемъ* измѣненія этаго угла, ибо, по всей вѣроятности, показанія двухъ наблюдателей принадлежатъ различнымъ моментамъ.

Числа Г. Де-ля-Рю заимствованы изъ предварительныхъ его сообщеній (Illustrated London News, Aug. 25 и Times 9 Aug.), въ которыхъ онъ безъ сомнѣнія исключилъ всѣ не столь значительные выступы.—Несогласія въ углахъ положенія имѣютъ здѣсь мѣсто именно для тѣхъ выступовъ, кои находились въ направленіи приблизительно перпендикулярномъ къ движенію луны.—Недостатокъ важныхъ данныхъ, встрѣчающійся у большей части наблюдателей относительно точнаго времени опредѣленія угловъ положенія однихъ и тѣхъ же выступовъ, препятствуетъ сравнить положеніе оныхъ, отнесенное къ центру солнца, для различныхъ пунктовъ наблюденія и тѣмъ самымъ несомнѣнно доказать, что они принадлежатъ къ этому свѣтилу. Но, составивъ общій рисунокъ и внеся въ оный всѣ извѣстныя мнѣ доселѣ данныя относительно этого пункта, я пришелъ къ убѣжденію, что для всѣхъ мѣстъ наблюденія были видимы одни и тѣ же предметы, и все различіе зависитъ по преимуществу или отъ параллактическаго перемѣщенія луны въ течени времени полнаго затмѣнія и соотвѣтственно положенію наблюдателей находившихся то съ сѣверной то съ южной стороны центральной линіи затмѣнія, или же заключается въ формѣ, размѣрахъ окрашиваніи и родѣ появленія или исчезанія выступовъ, а равно и въ числѣ оныхъ,—т. е. что въ томъ или въ другомъ мѣстѣ тотъ или другой выступъ не былъ усмотрѣнъ наблюдателемъ. Примѣръ послѣдняго случая представляетъ самъ Г. Секки, говоря объ отдѣленномъ отъ края луны красномъ облачкѣ, которое находится въ его фотографіи, а равно было наблюдаемо почти во всѣхъ другихъ пунктахъ, и котораго однако онъ незамѣтилъ въ трубѣ. Въ томъ же самомъ сознается и Г. Д'Аббади. Упоминаемое здѣсь облачко подало поводъ къ весьма оживленному спору между Гг. Секки и Плянтамуромъ, (Comptes rendus T. LI. NN 16 и 21), изъ коихъ послѣдній утверждаетъ, что оно исчезло для него изъ виду, постепенно ослабѣвая въ свѣтѣ, и какъ бы улетучиваясь, но не было покрыто луннымъ краемъ, какъ бы это должно было быть и какъ утверждаютъ многіе другіе наблюдатели, а еще несомнѣннѣе фотографич. изображенія. Нельзя пропустить впрочемъ безъ вниманія и другого такого же утверженія, а именно Египетскаго астронома Махмудъ Бея, наблюдавшаго въ Dongolach въ Нубіи (Comptes R. T. LIII N. 4), который говоритъ, что ни одинъ изъ наблюдаемыхъ имъ шести выступовъ не исчезъ во время затмѣнія. (?)—Но такой доводъ, основанный на простой видимости явленія и прямо противоположный другимъ, еще болѣе положительнымъ свидѣтельствамъ, хотя бы онъ и опирался на весьма сильный авторитетъ, все-таки для насъ далеко не представляетъ той силы доказательства, какую мы почерпаемъ изъ предъидущихъ численныхъ сравненій для угловъ положенія выступовъ.

Вообще, наблюдаемыя, субъективныя различія показаній въ отношеніи размѣровъ, формы, степени свѣта и окрашиванія выступовъ, какія встрѣчаются у различныхъ наблюдателей, всего менѣе могутъ служить доказательствомъ противъ дѣйствительнаго существованія этихъ предметовъ. При этомъ стоитъ только припомнить различіе въ изображеніяхъ однихъ и тѣхъ же солнечныхъ пятенъ и факеловъ, снятыхъ въ одно и то же время различными наблюдателями и при обстоятельствахъ неравненно выгоднѣйшихъ, чѣмъ въ краткое время полнаго затмѣнія; а равно и различія въ изображеніяхъ кометныхъ оболочекъ и туманныхъ пятенъ.

Обратимся теперь къ самому важному доводу защитниковъ оптической теоріи, т. е. къ измѣненію высоты выступовъ по восточномъ и западномъ краѣ луны. Всѣ измѣренія, сдѣланныя для этой цѣли во время послѣдняго затмѣнія, и преимущественно Плянтамуромъ, Д'Аббади, Феличь, Рюмкеромъ, Леспіо, Виннеке, Брунсомъ и мног. друг. (согласно съ результатами 1842 и 1851 г.) требуютъ почти вдвое быстрѣйшаго движенія для луны.—Эти данныя *измѣреній* не могутъ быть оспариваемы; и, очевидно намъ необходимо при этомъ допустить, что должна существовать какая либо *оптическая* причина, которая увеличиваетъ *кажущуюся* высоту выступовъ тѣмъ сильнѣе, чѣмъ послѣдніе болѣе выдаются изъ за луннаго края. Эта причина можетъ заключаться, по мнѣнію однихъ, въ томъ, что слабѣйшіе свѣтомъ верхніе части выступовъ легче исчезаютъ изъ виду на свѣтломъ грунтѣ тогда, когда болѣе широкія и яркія основанія оныхъ уже покрываются луннымъ краемъ; а по мнѣнію другихъ — въ иррадіаціи, которая вообще тѣмъ сильнѣе проявляется, чѣмъ значительнѣе относительный свѣтъ наблюдаемаго предмета. (какъ напр въ раскаленныхъ отъ гальваническаго тока угляхъ, или платиновой проволокѣ, въ опытахъ Секки (Astronomische Nachrichten N. 1289). Противъ послѣдняго объясненія возсталъ Г. Фэ (Comptes R. T. LII. N. 3), доказывая не безъ основанія, что явленіе иррадіаціи въ настоящемъ случаѣ должно бы по преимуществу обнаруживаться растяженіемъ выступовъ внутрь луннаго диска и значительнымъ уменьшеніемъ видимаго діаметра луны, что до сихъ поръ однако не подтверждено наблюденіями. Но самъ же Г. Фэ въ статьѣ своей (Comptes R. T. LI. N. 12) по поводу наблюденій, произведенныхъ въ Батна (Алжиръ), экспедиціею подъ управленіемъ Лосседа, старается объяснить измѣненіе формы узкаго солнечнаго серпа, незадолго до начала полнаго затмѣнія, а именно *видимое* расширеніе онаго, соединенное съ уменьшеніемъ кривизны ограничивающаго серпъ луннаго контура, которое было замѣчено Г-мъ Саллицисъ и даже несомнѣнно обнаружено снятымъ въ тоже время фотографическимъ изображеніемъ. Здѣсь мы имѣемъ дѣло, очевидно, съ явленіемъ того же рода, т. е. съ *кажущимся* увеличеніемъ отстоянія отъ луннаго края внѣшней границы *непосредствено* видимаго солнечнаго серпа; и однако Г. Фэ находитъ, по его мнѣнію, удовлетворительное объясненіе явленію, или въ усиленной земной рефракціи (конечно въ слѣдствіе охлажденія воздушныхъ слоевъ близкихъ къ конусу полной тѣни), или же, вмѣстѣ съ Г. Лосседа, въ гипотезѣ существованія лунной атмосферы, которая въ то же время должна служить и къ объясненію видимости цѣлаго луннаго контура внѣ солнечнаго диска. Нельзя не признать, что Г. Фэ весьма остроумно пользуется здѣсь извѣстнымъ теоретическимъ результатомъ Г. Ганзена, а именно что центръ тяжести луннаго тѣла лежитъ далѣе отъ земли нежели центръ фигуры обращенной къ землѣ половины на-

шего спутника (*), и поэтому на сторонѣ, постоянно отвращенной отъ земли, возможно существованіе атмосферы, необнаруживаемой однако наблюденіями звѣздныхъ покрытій. Но около времени новолунія, именно эта половина луны подвергается продолжительному нагрѣванію солнца и пріобрѣтаетъ безъ сомнѣнія весьма высокую температуру (по мнѣнію Дж. Гершеля высшую отъ температуры кипящей воды). Такимъ образомъ *возможно*, что сильно расширяющаяся приэтомъ лунная атмосфера, оставаясь постоянно концентрическою къ центру тяжести, переходитъ тогда за видимый съ земли лунный край и становится причиною вышеупомянутыхъ явленій.—Не придавая этому объясненію бóльшагó вѣса передъ предъидущими, мы можемъ однако съ полнымъ правомъ заключить, что измѣненіе *кажущейся* высоты выступовъ, (хотя и не имѣющее до сихъ поръ удовлетворительнаго объясненія) *допускаетъ* однако возможность какого либо физическаго объясненія, нисколько не исключающаго дѣйствительнаго существованія этихъ выступовъ, какъ свѣтовыхъ облаковъ солнечной атмосферы; между тѣмъ какъ несомнѣнно доказанное для нѣкоторыхъ выступовъ передвиженіе на лунномъ краѣ съ полнымъ сохраненіемъ ихъ наружнаго вида вполнѣ разрушаетъ оптическую теорію оныхъ. Въ подтвержденіе нашего заключенія мы приведемъ наконецъ и результатъ наблюденія поляризаціи свѣта выступовъ постоянно оказывающійся *отрицательнымъ*. Наблюденія Д'Аббади и преимущественно Г-на Пражмовскаго не оставляютъ въ томъ никакого сомнѣнія; послѣдній вполнѣ основательно заключаетъ, что выступы содержатся въ этомъ отношеніи подобно облакамъ земной атмосферы и должны слагаться изъ жидкихъ или твердыхъ, но никакъ не газообразныхъ частицъ.

Мнѣ остается наконецъ упомянуть о предполагаемой связи между явленіями выступовъ и солнечныхъ факеловъ. Наблюденія пятенъ и факеловъ, произведенныя въ дни ближайшіе къ времени послѣдняго полнаго затмѣнія Г. Швейцеромъ въ Москвѣ и Г. Горнштейномъ въ Вѣнѣ, (Astronom. Nachr. NN. 1274 и 1276), именно съ цѣлію опредѣленія положенія тѣхъ изъ факеловъ, которые должны были находиться на видимой окружности солнца въ теченіе полнаго покрытія, равнымъ образомъ и опредѣленія угловъ положенія факеловъ, видимыхъ вблизи солнечнаго края тотчасъ по окончаніи затмѣнія Г-мъ Виннеке, могутъ безъ сомнѣнія поддержать вѣру въ близкую связь этихъ явленій, но недостаточны для доказательства тождества оныхъ. Въ этомъ отношеніи самымъ убѣдительнымъ фактомъ все еще остаются наблюденія Г-на Швейцера при случаѣ затмѣнія 1851 года, (Astr. Nachr. N. 849), когда нѣсколько дней передъ тѣмъ преслѣдуемый имъ рогообразно загнутый факелъ и по положенію и по виду могъ быть принятъ тождественнымъ съ наибольшимъ изъ выступовъ, видѣнныхъ во время затмѣнія. Будущія наблюденія солнечныхъ затмѣній могутъ представить въ этомъ отношеніи болѣе выгодныя случайности, но трудно надѣяться однако, чтобы вопросъ вскорѣ былъ окончательно разрѣшенъ этимъ путемъ. Мнѣ кажется болѣе возможнымъ, что при помощи фотографіи рано или поздо удастся получить изображенія солнечныхъ выступовъ, сначала во время частныхъ затмѣній, а потомъ и во всякое время. Не смотря на то, что произведенныя доселѣ разнородныя попытки видѣть выступы независимо отъ полныхъ затмѣній, повели только къ заключенію, что освѣщеніе земной атмосферы и диффракція, въ случаѣ искуственно-произведеннаго затмѣнія, должны представить неустранимое къ тому препятствіе, ничто еще не доказываетъ, чтобы химическое дѣйствіе свѣта факеловъ не могло выказаться иначе, нежели дѣйствіе разсѣяннаго свѣта. Вліяніе же близости интенсивнаго свѣта солнечнаго края, по моему мнѣнію, можно легко устранить, принимая изображеніе солнца на чувствительную пластинку, въ которой бы былъ вырѣзанъ кругъ точно равный и соотвѣтствующій величинѣ изображенія солнца, т. е. чтобы на этой пластинкѣ могло составиться изображеніе только отъ предметовъ окружающихъ солнечный дискъ, лучи же послѣдняго всѣ проходили черезъ отверстіе не задерживаясь. Этимъ устраняется также и вредное дѣйствіе диффракціи.

М. Гусевъ.

(*) Этотъ результатъ подтвержденъ моими фотографическими изслѣдованіями. См. Bulletains de l'Acad. St. Peters. 1859.

Библіографическій указатель.

26. *Bruhns*, *C.* Die astronomische Strahlenbrechung in ihrer historischen Entwicklung. Leipzig. 1861.

Это сочиненіе, раздѣленное на 2 отдѣла, представляетъ весьма полный и поучительный обзоръ развитія нашихъ познаній въ теоріи рефракціи и ея приложеніи, отъ перваго открытія оной до настоящаго времени.

27. *Baeyer J.* Ueber die Grösse und Figur der Erde. Eine Denkschrift zur Begründung einer mittel-europäischen Gradmessung, nebst einer Uebersichtskarte. Berlin, 1861.

Главная цѣль этого сочиненія заключается въ томъ, чтобы доказать важность и сравнительную легкость производства новаго градуснаго измѣренія отъ Палермо до Христіаніи; такъ какъ многіе треугольники на этомъ пути уже измѣрены.

28. *Prowe L.* De Nicolai Copernici patria. Thoruni 1861.

Авторъ, извѣстный защитникъ нѣмецкаго происхожденія Коперника, въ предлежащемъ сочиненіи по преимуществу старается опровергнуть три аргумента, приводимые въ біографіи написанной Г-мъ Бартошевичемъ и присоединенной къ послѣднему Варшавскому изданію сочиненій Коперника, а именно 1. что Торнъ былъ польскимъ городомъ, что фамилія Коперника

польскаго происхожденія, и что Коперникъ будто бы вписалъ свое имя, какъ полякъ, въ альбомъ студентовъ въ Падуѣ.

29. *Bond G. P.* On the results of photometric experiments upon the light of the Moon and of the planet Jupiter made at the Observatory of Harvard College. Cambridge, 1861.

30. *Bond* On the relative brightness of the Sun and the Moon from observations made at the Observatory of Harvoud College.

Съ 1861 г. большой рефракторъ Кембриджской Обсерваторіи (соед. Штат.) съ успѣхомъ употребляется для фотографическихъ изображеній солнца, планетъ и неподвижныхъ звѣздъ. Сравненіе между свѣтомъ Юпитера и Луны показало, что первый производитъ въ 14 разъ сильнѣйшее химическое дѣйствіе. Фотометрическія сравненія показали также, что напряженіе свѣта Венеры, на разстояніяхъ отъ земли = I и отъ солнца = 0,723, относится къ свѣту Луны какъ 1:514. Свѣтъ Юпитера, на среднемъ разстояніи отъ Солнца и отъ Земли, содержится къ свѣту Луны какъ 1:6430, согласно съ прежнимъ результатомъ Дж. Гершеля (1:6620). Отношеніе между Albedo Венеры и Юпитера = 0, 908, вполнѣ согласно съ прежнимъ результатомъ Зейделя (0, 958). Изъ фотометрическихъ сравненій Луннаго свѣта съ Солнечнымъ при посредствѣ искуственнаго источника свѣта получается отношеніе 1:470980, а изъ фотографическихъ сравненій слѣдуетъ отношеніе 1:340000, которое близко подходитъ къ результату Бугера (1:300000).

31. *Peters C. A. F.* Ueber die Bestimmung des Längenunterschiedes zwischen Altona und Schwerin, ausgef. im Jahre 1858 durch galvanische Signale. Hamburg 1861.

Въ этомъ, превосходно обработанномъ сочиненіи, содержится подробное изложеніе методы пользованія гальваническимъ регистраторомъ Альтонской Обсерваторіи (конструкціи Крилле), въ примѣненіи онаго къ опредѣленію разности географическихъ долготъ. Недостижимая доселѣ точность окончательнаго результата, получаемаго въ весьма короткое время (въ настоящемъ случаѣ всего 8 ночей), съ огромнымъ сбереженіемъ труда и издержекъ, какіе требуются при другихъ методахъ опредѣленія (какъ напр. перевозкѣ хронометровъ), составляютъ главныя преимущества новаго способа. Хотя при употребленіи регистраторовъ другой конструкціи, отличной отъ Альтонской, метода самой операціи по необходимости должна подлежать небольшимъ измѣненіямъ; но обработка получаемаго этимъ путемъ матеріала, можно смѣло сказать, всегда останется образцовою въ книгѣ Г-на Петерса.

32. Das Prismatoid. Eine Erweiterung der elementaren Stereometrie von *Theodor Wittstein*. Hannover 1860.

Новое геометрическое тѣло, *призматоидъ*, вводимое авторомъ въ стереометрію, есть многогранникъ, ограниченный съ двухъ сторонъ двумя *параллельными*, но совершенно произвольными многоугольниками представляющими 2 *основныя* грани. Боковыя же грани суть треугольники (или трапеціи), для коихъ всегда служитъ основаніемъ одна изъ сторонъ того или другаго многоугольника, а вершина совпадаетъ съ однимъ изъ угловъ противуположной основной плоскости. Такимъ образомъ призматоидъ соотвѣтствуетъ въ плоской геометріи трапеціи, точно также какъ призма отвѣчаетъ параллелограмму, а пирамида треугольнику. Авторъ приводитъ, что въ каждомъ призматоидѣ, пересѣченномъ плоскостію, параллельною основаніямъ, на половинѣ высоты онаго, два раза взятый объемъ пирамиды, построенной на площади этаго *срединнаго* сѣченія и имѣющей высоту призматоида, будучи сложенъ съ объемомъ другой пирамиды, имѣющей въ основаніи площадь равную ариѳметической срединѣ изъ площадей обѣихъ основаній призматоида, при той же высотѣ, составляетъ именно объемъ самого призматоида. Приложенія этой прекрасной теоремы обнимаютъ точныя опредѣленія объемовъ произвольныхъ многогранниковъ и приблизительное исчисленіе оныхъ для тѣлъ, ограниченныхъ произвольными кривыми поверхностями.

Элементарное доказательство предъидущей теоремы, предложенное Профес. Бретшнейдеромъ въ *Grunert's* Archiv der Mathem. 1861. Hefft 1, столь наглядно что мы попробуемъ изложить оное здѣсь безъ чертежа. Если изъ какой либо точки *срединнаго* сѣченія призматоида проведемъ линіи ко всѣмъ угламъ его; то призматоидъ раздѣлится на столько пирамидъ, сколько онъ имѣетъ граней, и общею вершиною оныхъ будетъ избранная точка. Двѣ изъ упомянутыхъ пирамидъ опираются на параллельныя *основныя* грани и сумма объемовъ оныхъ тождественна съ объемомъ пирамиды имѣющей основаніе, равное полусуммѣ *основаній* призматоида, и высоту общую съ призматоидомъ. Остается доказать, что сумма остальныхъ пирамидъ, опирающихся на боковыя грани призматоида, должна составлять двойной объемъ пирамиды, построенной на срединномъ сѣченіи призматоида. И дѣйствительно: такъ какъ каждая изъ боковыхъ пирамидъ раздѣляется плоскостію, проходящею черезъ ея вершину (т. е. срединнымъ сѣченіемъ призматоида) такъ, что и двѣ стороны основанія пирамиды (треугольника, или трапеціи) разсѣкаются оною пополамъ; то легко убѣдиться, что объемъ какой либо изъ боковыхъ пирамидъ будетъ вчетверо болѣе объема другой пирамиды, имѣющей основаніемъ плоскость разсѣкающую данную пирамиду (т. е. часть срединнаго сѣченія, содержащуюся внутри именно этой боковой пирамиды), а высотою отстояніе сѣкущей плоскости отъ каждаго изъ угловъ основанія той же боковой пирамиды, или въ настоящемъ случаѣ половину высоты призматоида. Понятно, что вышеприведенную теорему можно выразить различнымъ образомъ.—Мы прибавимъ еще, что желательно было бы, дабы новое геометрическое тѣло вошло въ наши учебные курсы.

Г.

III.

Извлеченія изъ періодическихъ изданій.

1. О нѣкоторыхъ алгебраическихъ кривыхъ, между коими Лемниската представляетъ частный случай. Пр. *Барнаба Тортолини.* (Annali di Matematica pura ed applicata. N. 3, s. 178. и Zeitschrift für Mathematik und Physik, 6 Jahrg. 3 Heft. 1861).

Если r означаетъ радіусъ векторъ кривой и u уголъ, составляемый имъ съ осью x прямоуг. координатъ, въ началѣ коихъ лежитъ полюсъ этой кривой, то

$$x = r\cos u\ ,\quad y = r\sin u\ ,$$

и

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx}\ ,$$

гдѣ φ есть уголъ касательной въ точкѣ (x, y) съ осью x-овъ, а слѣдовательно

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin u\, dr + r\cos u\, du}{\cos u\, dr - r\sin u\, du}\ ,$$

откуда $\frac{r\, du}{dr} = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg} u}{1 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg} u} = \operatorname{tg}(\varphi - u)$;

$\varphi - u$ есть уголъ касательной въ точкѣ (x, y) съ радіусомъ r.

Если φ_1 означаетъ уголъ нормала съ абсциссою, тогда

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} + \varphi$$

и слѣдов. $\operatorname{tg}(\varphi_1 - u) = -\frac{dr}{r\, du}$, или $\frac{dr}{r} = -du \operatorname{tg}(\varphi_1 - u)$.

Для примѣра интегрированія послѣдняго уравненія, положимъ для простоты:

$$\varphi_1 = (2n+1)\ u$$

тогда будетъ $\frac{dr}{r} = -du \operatorname{tg}. 2nu = \frac{d \cos 2nu}{2n \cos 2nu}$

а слѣд. $2n \log r = \log(\cos 2nu) + C$.

Опредѣляя постоянное C подъ условіемъ что $r = a$, когда $u = 0$, получ. $C = 2n \log. a$ и переходя отъ логарифмовъ къ числахъ:

$$r^{2n} = a^{2n} \cos 2nu.$$

слѣд. для $n = 1$ выходитъ уравненіе лемнискаты.

Алгебраическія кривыя, содержащіяся въ этомъ уравненіи были изслѣдуемы, преимущественно Серре (Journ. p. Liouville) не только для $2n$ — числа четнаго, а также и нечетнаго. Если уравненіе напишется подъ общимъ видомъ

$$r^m = a^m \cos m u\ ,$$

то кривая представляетъ ту особенность, что произведеніе составленное изъ m отстояній какого нибудь ея пункта отъ m различныхъ неподвижныхъ пунктовъ постоянно.

Эти линіи составляли уже предметъ аналитическихъ изслѣдованій *Фагнало* въ его сочиненіи Producioni matematiche, гдѣ онъ предлагаетъ себѣ задачу: „найти кривыя, для которыхъ уголъ составляемый одной изъ хордъ, выходящихъ изъ одного пункта, съ осью, находится въ данномъ численномъ отношеніи къ углу, составляемому нормаломъ (на другомъ концѣ хорды) къ кривой съ тою же осью". Для лемнискаты, для которой уголъ между нормаломъ и осью $2a$ въ три раза превосходитъ уголъ образуемый хордою, получается уравненіе

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2).$$

Для $n = 2$ получается кривая, которой алгебраическое уравненіе 8-й степени, а именно

$$(x^2 + y^2)^4 = a^4 (x^4 - 6x^2y^2 + y^4)\ ,$$

и которое было найдено также Фагнано'мъ. Здѣсь уголъ нормала съ осью въ пять разъ болѣе угла при полюсѣ.

Вообще если мы хочемъ отъ полярнаго уравненія степени $2n$ перейти къ алгебраическому для x и y; то степень послѣдняго восходитъ на $4n$. По теоремѣ Моавра мы пишемъ

$$2\cos 2nu = (\cos u + i \sin u)^{2n} + (\cos u - i \sin u)^{2n},$$

гдѣ $i = \sqrt{-1}$, а подставляя на правой части этаго уравненія

$$\cos u = \frac{x}{r}\ ,\ \sin u = \frac{y}{r}\ ,\ r = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,$$

получимъ окончательное

$$(x^2 + y^2)^{2n} = \frac{a^{2n}}{2}\left((x + iy)^{2n} + (x + iy)^{2n}\right),$$

уравненіе изъ котораго, при положеніи $x = 1, 2, 3$ и т. д., получаются всѣ алгебраическія кривыя тогоже рода различныхъ степеней.

Г.

2. *Элементарный выводъ формулы для функціи* $x^n + \frac{1}{x^n}$.

Въ N. 16 Вѣстника Матем. Наукъ Г. Бугаевъ въ своемъ замѣчаніи на одну статью сочиненія: »Cours d'Algèbre supérieure, par Serret« предложилъ простѣйшій выводъ выраженія функціи $x^n + \frac{1}{x^n}$ въ функціи $x + \frac{1}{x}$. Въ Nouvelles Annalles de Mathématiques, Avril, 1861, стр. 155. Г. Вашетъ выводитъ туже формулу элементарно слѣдующимъ образомъ:

Извѣстно что:

$$x^m + \frac{1}{x^m} = \left(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{m-2} + \frac{1}{x^{m-2}}\right),$$

или обозначая для краткости $x^n + \frac{1}{x^n}$ чрезъ z_n

$$z_m = z_{m-1}\, z - z_{m-2}\ .$$

Полагая $m = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ выходитъ:

$$z_0 = 2$$

$$z_1 = z$$

$$z_2 = z^2 - 2$$

$$z_3 = z^3 - 3z$$

$z_4 = z^4 - 4z^2 + 2$

$z_5 = z^5 - 5z^3 + 5z$

$z_6 = z^6 - 6z^4 + 9z^2 - 2$

$z_7 = z^7 - 7z^5 + 14z^3 - 7z$

$z_8 = z^8 - 8z^6 + 20z^4 - 16z^2 + 2$

$z_9 = z^9 - 9z^7 + 27z^5 - 30z^3 + 9z$

$z_{10} = z^{10} - 10z^8 + 35z^6 - 50z^4 + 25z^2 - 2$

$z_{11} = z^{11} - 11z^9 + 44z^7 - 77z^5 + 55z^3 - 11z$

. . . . (*)

Откуда легко замѣтить:

1) что, для указателей четныхъ, ежели $m = 4p$, то послѣдній членъ есть $(+2)$, а ежели $m = 4p + 2$, то послѣдній членъ есть (-2); для указателей нечетныхъ, ежели $m = 4p + 1$, то послѣдній членъ есть $(+ma)$, а ежели $m = 4p + 3$, то послѣдній членъ есть $(-ma)$.

2) Число членовъ увеличивается единицею отъ одного четнаго указателя къ другому и превосходитъ единицею половину указателя.

3) Для четнаго указателя, разложеніе содержитъ только четныя степени z, а для нечетнаго только нечетныя степени.

4) Коеффиціентъ всякого члена въ разложеніи z_m, находящійся передъ z^p, равняется суммѣ коеффиціентовъ передъ z^{p-1} въ разложеніи z_{m-1} и передъ z^p въ разложеніи z_{m-2}.

5) Наконецъ, члены имѣютъ попеременно знаки $(+)$ и $(-)$.

Обозначивъ черезъ $T_{\frac{m}{k}}$ коеффиціентъ передъ которымъ членовъ есть k получимъ:

$$(1)\quad z_m = z^m - T_{\frac{m}{1}} z^{m-2} + T_{\frac{m}{2}} z^{m-4} - T_{\frac{m}{3}} z^{m-6} + \ldots \pm T_{\frac{m}{k-1}} z^{m-2k+2} \mp T_{\frac{m}{k}} z^{m-2k} \pm \ldots$$

Разсматривая члены предъидущихъ рядовъ по вертикальнымъ столбцамъ, замѣчаемъ, что каждый изъ этихъ вертикальныхъ столбцовъ начинается числомъ 2, и если передъ нимъ есть столбцовъ k, то указатель горизонтальнаго ряда есть $2k$; а посему всегда $T_{\frac{2k}{k}} = 2$.

Ежели указатель $m > 2k$, то имѣемъ по закону составленія коеффиціентовъ:

$$(2)\quad \begin{cases} T_{\frac{m}{k}} = T_{\frac{m-1}{k}} + T_{\frac{m-2}{k-1}} \\ T_{\frac{m-1}{k}} = T_{\frac{m-2}{k}} + T_{\frac{m-3}{k-1}} \\ \ldots\ldots\ldots \\ T_{\frac{2k+1}{k}} = T_{\frac{2k}{k}} + T_{\frac{2k-1}{k-1}} \\ T_{\frac{2k}{k}} = 2 = T_{\frac{2k-2}{k-1}}\ ; \end{cases}$$

если сложимъ эти равенства, то получимъ:

$$(3)\quad T_{\frac{m}{k}} = T_{\frac{m-2}{k-1}} + T_{\frac{m-3}{k-1}} + \ldots + T_{\frac{2k-1}{k-1}} + T_{\frac{2k-2}{k-1}} = \sum_{p=2k-2}^{p=m-2} T_{\frac{p}{k-1}}$$

$T_{\frac{m}{0}} = 1$, исключая $T_{\frac{0}{0}}$ которое $= 2$

$$T_{\frac{m}{1}} = T_{\frac{m-1}{1}} + T_{\frac{m-2}{0}} = T_{\frac{m-1}{1}} + 1,$$

т. е. надо увеличивать единицею коеффиціентъ предъидущій въ вертикальномъ столбцѣ.

Начиная съ $m = 3$, $T_{\frac{m}{3}} = 3$, слѣд. $T_{\frac{m}{1}} = m$

$$T_{\frac{m}{2}} = \sum_{p=2}^{p=m-2} T_{\frac{p}{1}} = 2 + 3 + 4 + \ldots + (m-2) = \frac{m(m-3)}{1\,.\,2}$$

$$T_{\frac{m}{3}} = \sum_{p=4}^{p=m-2} T_{\frac{p}{2}} = \sum_{p=4}^{p=m-2} \frac{p(p-3)}{1\,.\,2} = \frac{1}{2}\{(m-2)(m-5) + (m-3)(m-6) + \ldots + 5\,.\,2 + 4\,.\,1\}$$

$$2\,T_{\frac{m}{3}} = 1(1+3) + 2(2+3) + \ldots + (m-5)(m-5+3) = 1^2 + 2^2 + \ldots + (m-5)^2 + 3\{1+2+3+\ldots+(m-1)\} =$$

$$\frac{(m-5)(m-4)(2m-9)}{6} + \frac{3(m-5)(m-4)}{1\,.\,2} = \frac{(m-5)(m-4)}{1\,.\,2}\left\{\frac{2m-9}{3} + 3\right\} = \frac{2m}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{(m-4)(m-5)}{}\,,$$

$$T_{\frac{m}{3}} = \frac{m(m-4)(m-5)}{1\,.\,2\,.\,3}\,.$$

Вообще: $$T_{\frac{m}{k}} = \frac{m(m-k-1)(m-k-2)\ldots(m-2k+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k}\,.$$

(*) Если раздѣлить полуокружность на сколько угодно равныхъ частей и точки дѣленія соединить съ однимъ концомъ діаметра; то хорды и будуть, какъ извѣстно, представлять собою послѣдовательно функціи: z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 . . .

Для доказательства этой общей формы коэффиціента въ разложеніи z_m, предположимъ, что она имѣетъ мѣсто для разложеній $z_1\ z_2\ .\ .\ .\ z_{m-1}$, и докажемъ, что она справедлива и для разложенія z_m

Въ самомъ дѣлѣ, по формулѣ (2) будетъ:

$$T_{\frac{m}{k}} = \frac{(m-1)(m-k-2)(m-k-3)\ .\ .\ .\ (m-2k)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ .\ .\ k} + \frac{(m-2)(m-k-2)(m-k-3)\ .\ .\ .\ (m-2k+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ .\ .\ (k-1)} =$$

$$\frac{(m-k-2)(m-k-3)\ .\ .\ .\ (m-2k+1)}{1\ .\ 2\ .\ .\ .\ (k-1)} \left\{\frac{(m-1)(m-2k)}{k} + m - 2\right\} = \frac{m(m-k-1)(m-k-2)\ .\ .\ .\ (m-2k+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ .\ .\ k}.$$

А посему формула (1) имѣетъ видъ:

$$z_m = z^m - \frac{m}{1} z^{m-2} + \frac{m(m-3)}{1\ .\ 2} z^{m-4} - \frac{m(m-4)(m-5)}{1\ .\ 2\ .\ 3} z^{m-6} + \ldots \pm \frac{m(m-k-1)(m-k-2)\ .\ .\ .\ (m-2k+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ .\ .\ k} z^{m-2k} \mp \ldots,$$

общій членъ имѣетъ знакъ (+) или (—), смотря потому: k четное или нечетное.

А. Ж.

Краткія извѣстія.

— Въ наивысшей пирамидѣ Хеопса, имѣющей квадратное основаніе, по свидѣтельству Геродота, площадь каждаго изъ боковъ равняется квадрату высоты. Отсюда слѣдуетъ, что каждый бокъ оной долженъ быть наклоненъ къ отвѣсной линіи подъ угломъ, коего cos = tang. т. е. этотъ уголъ составляетъ 38° 10′ 46″; ибо cos 38° 10′ 46″ = tg 38° 10′ 46″ = 0,7863. Эта величина весьма мало разнится отъ $\frac{1}{4}\pi = 0,7854$; а потому периметръ основанія пирамиды, раздѣленный на высоту составляетъ почти 2π. А. С Гершель (Quarterly Journal) находитъ въ этомъ подтвержденіе оригинальнаго мнѣнія Телора, что цѣль построенія этой пирамиды именно и состояла въ томъ, чтобы передать потомству величину отношенія окружности къ радіусу. Такимъ образомъ надобно допустить, что Египтяне знали число π съ достаточнымъ приближеніемъ за 2366 лѣтъ до нашего лѣтосчисленія. На предъидущемъ замѣчаніи основывается также графическій, приближенный способъ нахожденія длины четверти окружности. Если при одномъ концѣ діаметра даннаго круга провести касательную, а изъ другого его конца сѣкущую такъ, что бы внутренняя часть оной, или хорда, равнялась отрѣзку касательной; то легко доказать, что этотъ отрѣзокъ будетъ двойной тангенсъ, а хорда двойной косинусъ угла, составляемаго съ діаметромъ и, по предъидущему, оба весьма близко равны $\frac{1}{2}\pi$.

— Новое удачное примѣненіе телеграфа къ наблюденію небесныхъ явленій сдѣлано въ послѣднее время въ Римѣ Г. Секки, а именно для опредѣленія разстоянія падающихъ звѣздъ. Соотвѣтственными наблюденіями въ Римѣ и Чивита Веккіа между 3 и 15 прошедшаго Августа, удалось подтвердить одновременность появленія и тождество для весьма многихъ звѣздъ, въ среднемъ отъ 8 до 10 каждый вечеръ, и для 34-хъ 10-го Августа. — *Среднее* отстояніе падающихъ звѣздъ отъ земли, опредѣленное изъ зенитальныхъ звѣздъ, даетъ 50 геогр. миль. а наибольшее разстояніе 100 геогр. миль,—результатъ, согласный съ вѣроятнѣйшими выводами для высоты земной атмосферы.

— Профессоръ *Лоомисъ* сдѣлалъ замѣчаніе, что одновременно съ большими сѣверными сіяніями 28 Августа и 4 Сент. 1859 были наблюдаемы и южныя сіянія, которыя достигали наибольшаго блеска именно въ тѣ же самые моменты. Сравнивъ по этому поводу всѣ данные, какіе ему было доступны, относительно наблюдаемыхъ доселѣ полярныхъ сіяній, онъ пришелъ къ слѣдующему, хотя уже и неновому результату: каждый разъ когда показывалось *южное* сіяніе надъ горизонтомъ Haburton'а (въ Австраліи) и на сѣверѣ въ тотъ же день или было наблюдаемо *сѣверное* сіяніе, или, покрайней мѣрѣ, въ различныхъ пунктахъ сѣвернаго полушарія были замѣчены необыкновенныя магнитныя пертурбаціи, составляющія почти несомнѣнный признакъ присутствія сѣвернаго сіянія въ пунктахъ болѣе или менѣе отдаленныхъ. Вообще, кажется весьма вѣроятнымъ, что всякая причина, измѣняющая магнитное напряженіе одного изъ земныхъ полюсовъ, въ то же время и подобнымъ же образомъ измѣняетъ напряженіе и другого полюса.

— Берлинскій фотографъ Гюнтеръ, снимавшій для стереоскопа статую амазонки, поражающей пикою льва, замѣтилъ на изображеніи въ продолженіи острея свѣтлый лучь, который не былъ усмотрѣнъ во время самой операціи. Г. Гюнтеръ, сообщивъ объ этомъ наблюденіи Профессору Дове вмѣстѣ съ своимъ мнѣніемъ, что причиною явленія вѣроятно было электрическое истеченіе, представилъ послѣднему и самый негативъ изображенія. Пр. Дове подтверждаетъ вѣроятность вышеприведенной догадки, присовокупляя, что во время полученія изображенія господствовало именно такое состояніе погоды (Graupelwetter), которое благопріятствуетъ развитію электричества, и что свѣтлый лучь на оконечности пики, незамѣтный для глаза днемъ, представляетъ безъ сомнѣнія явленіе того же рода, какъ извѣстное свѣченіе на оконечностяхъ мачтъ (огни Св. Эльма).—Это наблюденіе повело къ испытанію возможности фотографированія слабыхъ электрическихъ явленій, а именно слоистаго свѣта, обнаруживающагося въ Гейслеровыхъ трубкахъ. Изображенія (при дѣйствіи отъ 3 до 6 минутъ) представили рядъ свѣтлыхъ прикасающихся шариковъ, какъ бы перловъ; изъ чего Пр. Дове заключаетъ, что явленіе слоистаго свѣта указываетъ на вращеніе около неподвижныхъ центровъ въ каждомъ отдѣльномъ дискѣ свѣтоваго слоя.

Печатать позволяется, Вильно 14 Октября 1861 года. *Ценсоръ Статскій Совѣтникъ и Кавалеръ А. Мухинъ.*

ВИЛЬНО Типографія А Марциновскаго. Редакторъ Издатель *М. Гусевъ.*